MATEMÁTICA DISCRETA: Conjuntos, combinatoria y grafos

Versión 20110923

(corrección de erratas a versión 20100712)

Índice general

Presentación

Este documento está dirigido a todo aquel que necesite recordar conocimientos matemáticos sobre teoría de conjuntos, combinatoria y teoría de grafos, en especial a los estudiantes de primer y segundo año de ingeniería informática. También para todo aquel que necesite una guía rápida de conceptos.

- Teoría de conjuntos.- Con ella se entiende mejor la lógica matemática, la matemática combinatoria, la especificación de lenguajes de programación y la teoría de autómatas y computación.

- Combinatoria.- Necesaria para todos los ámbitos: desde estadística al análisis de algoritmos.

- Teoría de grafos.- En esta se basan muchas de las técnicas avanzadas de programación.

No se ha pretendido sustituir a ningún tratado matemático, sino construir una guía de conceptos, los cuales se presentan de una manera más intuitiva que formal, no entrando en demostraciones matemáticas.

Este documento nace de la experiencia propia de volver a estudiar una carrera universitaria después de varios años en la vida laboral. Esta pasa por volver a recordar muchos conceptos olvidados, que se supone que se saben, y que, por tanto, se pasan por alto o se tratan de manera superficial.

Aviso de derechos de autor

CAPÍTULO 1.- TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1. ¿QUÉ ES UN CONJUNTO?

Un conjunto es una colección de objetos **distintos** (simples o compuestos), llamados **elementos,** que tienen alguna **propiedad en común**, y que además la cumplen **todos ellos**. Esta colección puede ser finita o infinita (hasta que se llegue a los conjuntos infinitos, en adelante se hablará de conjuntos finitos). Además, como es una colección, **el orden** en que se den a conocer los elementos del conjunto **es irrelevante**.

Dado **un conjunto** cualquiera, **se identificará por una letra mayúscula**. Esto es más intuitivo que si cada vez que operamos con él, se tuviese que llamar "*el conjunto de elementos que cumplen….*".

Para representar un conjunto de forma textual, se delimitan los **elementos entre llaves** y lo llamamos con una letra mayúscula, de la forma:

$$A = \{elementos\}$$

Los elementos de un conjunto se pueden describir de dos formas:

- **En extensión o lista.-** Por la expresión de todos y cada uno de sus elementos, separados por comas. Aquí la propiedad está implícita en las características de la lista de elementos. Por ejemplo

$$A=\{a,b,c,d\}$$
$$B=\{1,2,3,4,5\}$$

Si identificamos de forma genérica los elementos de un conjunto con letras, esto se hará con minúsculas (como en el conjunto A del ejemplo anterior).

- **Por comprensión**.- Por la declaración formal de una propiedad que cumplen todos y cada uno de sus elementos. Es posible que un mismo conjunto pueda tener varias declaraciones equivalentes. Cuando se trata de conjuntos formales, si P es la propiedad que cumplen los elementos del conjunto, la descripción

$$A=\{ a / P(a)\}$$

significa que *A es el conjunto de elementos a, tal que cumplen la propiedad P.*

En conjuntos que tienen muchos elementos, lo normal es que estos se describan por comprensión. ¿Porqué? porque si se hiciera en extensión, serían poco claros o ilegibles, además de requerir mucho tiempo para escribir todos los elementos.

Cuando un conjunto tiene pocos elementos, este se puede representar de forma gráfica. Tradicionalmente se ha realizado mediante los diagramas de Venn: Se representan los elementos del conjunto dentro del área delimitada por una curva o polígono cerrado, (normalmente una circunferencia o una elipse), y que se etiqueta con el nombre del conjunto.

Ejemplo 1.1

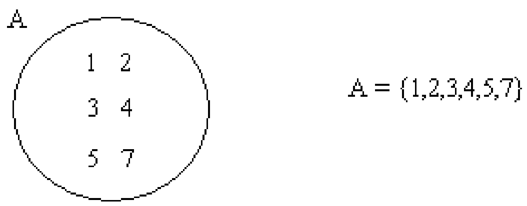


Figura 1.1. Representación en extensión y con diagrama de Venn

--

Ejemplo 1.2

Sea el conjunto de alumnos de una academia X, los cuales reciben clases de matemáticas, que llamaremos A. Tenemos matriculados en matemáticas a Juan, María, Pedro, Santiago, Eva, Carmen y Ángel, que denotamos por la letra minúscula que corresponde a la inicial del nombre.

- El conjunto A definido en extensión será A ={j,m,p,s,e,c,a}

- El conjunto A definido por comprensión por A= { a / alumnos de la academia X que reciben clases de matemáticas}, o por A= {a / Matemáticas(a)}

- Si resulta que las clases de matemáticas se dan en el aula 0.11, y este aula sólo se utiliza para matemáticas, podríamos tener una segunda definición por comprensión A= {a / alumnos de la academia X que reciben clases en el aula 0.11}

- Y si lo representamos con un diagrama de Venn,

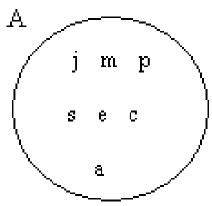


Figura 1.2. Representación con diagrama de Venn del ejemplo 1.3.

--

Podemos tener un conjunto que **no** tenga **elementos**: en este caso se denota por el símbolo del **conjunto vacío " Ø ", o por el conjunto sin elementos "{ }"**. Su representación gráfica con diagramas de Venn será una curva o polígono cerrado, etiquetado con su nombre y sin ningún elemento dentro.

Ejemplo 1.3

Sea B un conjunto B = {b / alumnos de la academia X que reciban clases de esperanto}. Sabemos que en esta academia no hay ningún alumno. Esto se denotaría como B = Ø o como B = {} (Notar que aquí no hay llaves: Ø es el nombre de un conjunto especial y no el símbolo de algún elemento)

--

La **pertenencia de un elemento a un conjunto** se denota por el **símbolo ∈.** La **no pertenencia** se denota por el **símbolo ∉ .**

Ejemplo 1.4

- Elemento Juan pertenece a A se expresa: $j \in A$
- Si existe un alumno de la misma academia llamado Bernardo, pero que no recibe clases de matemáticas, b no pertenece a A, expresándose: $b \notin A$

--

1.2. CARDINAL DE UN CONJUNTO FINITO

De momento solo se dará la definición de cardinalidad para un conjunto finito. Así, dado el conjunto finito A, la cardinalidad de este conjunto es el **número de elementos distintos de A**, y se denota por **|A| o por #A**.

Ejemplo 1.5

En el ejemplo 1.3 de alumnos de matemáticas, la cardinalidad de A es: $|A| = 7$

--

La cardinalidad del conjunto vacío siempre es cero.

Ejemplo 1.6

Sea el conjunto C={1,2,4,5,2}. ¿Cuál es su cardinalidad? Se ha definido un conjunto como una agrupación de elementos distintos. $|C| = 4$ ya que el elemento 2 está repetido.

--

1.3. DOS RELACIONES ENTRE CONJUNTOS: IGUALDAD E INCLUSIÓN

Posteriormente se definirá lo que son las relaciones entre conjuntos y se expondrán las propiedades de estas dos (igualdad e inclusión), pero de momento definiremos la **pertenencia de un conjunto a otro conjunto y la igualdad entre conjuntos**.

Con esta *relación* definimos la **inclusión de conjuntos**. Dados dos conjuntos,

A={ a / alumnos de matemáticas de la academia X}
X={ x / alumnos de la academia X}

se dice que A está incluido en X (A es parte de X, A está contenido en X) si se da una de estas dos condiciones:

- Si *todos* los elementos de A también pertenecen a X, pero no todos los elementos de X están en A.

- Si *todos* los elementos de A también pertenecen a X, y todos los elementos de X pertenecen a A. Este es un caso particular, en el que se dice que **los conjuntos A y X son iguales** (recordar aquí que el orden de los elementos no es relevante), denotándose por $A = X$.

Si se cumple alguna de estas dos condiciones, se dice que **A es un subconjunto de X**, y lo denotamos como $A \subset X$. Si hay otro conjunto B que no cumple ninguna de ellas, se dice que B no es un subconjunto de X, y se denota como $B \not\subset X$.

Si se cumple solo la primera condición se dice que A es un **subconjunto propio** de X. También se dice que X es un **superconjunto** de A.

Algunos autores (sobre todo anglosajones) distinguen la notación de inclusión de conjuntos dependiendo de la propiedad que cumple. Así denotan con $\subset$ los subconjuntos propios, y denotan la manera general (subconjunto propio o conjuntos iguales) con $\subseteq$. Aquí utilizaremos el símbolo $\subset$ de manera general, indicando en ocasiones la otra notación.

Más adelante se verán las relaciones entre conjuntos y será entonces cuando veremos las propiedades de la relación de inclusión.

Ejemplo 1.7

En nuestro ejemplo de la academia ¿el conjunto vacío está incluido en X (conjunto sin alumnos)? y ¿ A es subconjunto de sí mismo?

- El conjunto vacío SIEMPRE cumple la primera condición, luego estará incluido en cualquier conjunto. Así Ø $\subset$ X.

- A cumple la segunda propiedad (A=A), por lo que es subconjunto de sí mismo.

--

Si A $\subset$ B, su representación gráfica con diagramas de Venn será dibujando una curva o polígono cerrado para B y dentro de él otra curva o polígono cerrado para A con sus elementos; los elementos de B que no pertenezcan a A, si los hubiera, estarán dentro de la primera curva (exterior) pero fuera de la segunda (interior). Dado que los elementos de A también están dentro de B, estos también pertenecen a B.

Ejemplo 1.8

Sigamos con el ejemplo de alumnos de matemáticas de la academia X,
A= { a / alumnos de la academia X que reciben clases de matemáticas}
Definamos ahora un conjunto B,

B= {b / chicas de la academia X que reciben clases de matemáticas}

De forma que queda que A={j,m,p,s,e,c,a} y B={m,e,c}

Su representación gráfica será

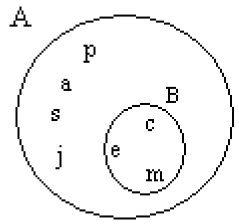


Figura 1.3. Diagrama de Venn de la inclusión de conjuntos

--

Ejemplo 1.9

Dados A={2,4,6,8} y B ={2,4,2,6,8,4} ¿A $\subset$ B?.

Aunque B tenga elementos repetidos, en la definición de conjuntos se ha establecido que son elementos distintos, luego los dos conjuntos son iguales, pudiendo expresarse que A = B

--

1.4. CONJUNTOS ESPECIALES

Uno de ellos, que ya se ha visto, que es el conjunto vacío, denotado por Ø. Otro de ellos, el **conjunto particiones de un conjunto,** se verá después de las operaciones entre conjuntos.

1.4.1. Conjunto universal

Es el conjunto de TODOS los elementos posibles y lo denotamos con X. (Como hemos dicho antes, de momento vamos a considerar conjuntos de cardinalidad finita).

Para su representación gráfica con diagramas de Venn, lo vamos a denotar con un rectángulo que contiene los subconjuntos de X y que etiquetaremos con el nombre X

Ejemplo 1.10

Continuando con el ejemplo de la academia, X representa el conjunto de todos los alumnos, luego se le puede considerar como el conjunto universal de alumnos. Contendrá al conjunto A de los que reciben clases de matemáticas (A es un subconjunto de X) y al resto de elementos, los alumnos que no reciben clases de matemáticas (en nuestro ejemplo, el elemento b)

$$X = \{j, m, p, s, e, c, a, b\}$$

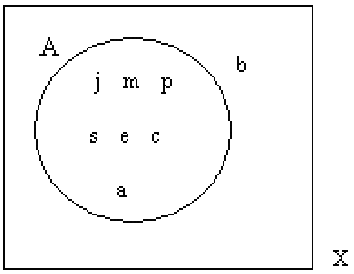


Figura 1.4. Diagrama de Venn para conjunto universal "academia"

--

1.4.2. Conjunto "partes de un conjunto" o conjunto potencia

Sea X el conjunto universal, el conjunto partes de un conjunto (o conjunto de las partes de X) es otro conjunto donde **cada elemento** es cada uno de **los subconjuntos** que se pueden formar con los **elementos de X** (todos los subconjuntos posibles). También se le denomina como "conjunto potencia de X", y se denota por $\mathscr{P}$ (X). Por comprensión se define como

$$\mathscr{P}(X) = \{ A / A \subset X\}$$

En extensión este conjunto contiene:

- Todos los subconjuntos de cardinalidad 0. En este caso es el conjunto vacío
- Todos los subconjuntos de cardinalidad 1
- Todos los subconjuntos de cardinalidad 2
- …
- Todos los subconjuntos de cardinalidad |X|. En este caso es uno, precisamente el conjunto X.

Ejemplo 1.11

Continuando con el ejemplo, X = { x / alumnos de la academia X}

$$\mathscr{P}(X) = \{ \emptyset , \{ j \}, .. ,\{j,m\}, \dots , \{j,m,p\}, \dots , X \}$$

--

Se hace hincapié en este detalle: **Ø y X también pertenecen al conjunto potencia** de X, ya que ambas cumplen con alguna de las condiciones para la inclusión de conjuntos.

El cardinal del conjunto potencia, dado que X es finito, será la suma del número de combinaciones (ver combinatoria, capítulo 2 punto 2.5) posibles de cardinalidad 1, más el número de combinaciones de cardinalidad 2, más…., más el número de combinaciones de cardinalidad X. Así nos queda el sumatorio:

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Donde m = |X| y n la cardinalidad de cada grupo de combinaciones. Operando este sumatorio (no se demostrará aquí) se llega a la conclusión de que $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$

Ejemplo 1.12

Siguiendo en la academia, la cardinalidad del conjunto potencia de X es

- Calculando el sumatorio 1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 elementos

- Utilizando la fórmula abreviada $|\mathscr{P}(X)| = 2^7 = 128$ elementos.

--

1.5. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

El resultado de una operación con conjuntos finitos es cerrada (es siempre otro conjunto finito). Dados dos conjuntos A y B, tal que $A \subset X$ y $B \subset X$, siendo X el conjunto universal, vamos a definir sus operaciones y propiedades.

- **Operaciones.-** Unión, intersección, complementario de un conjunto dado y diferencia entre conjuntos.

- **Propiedades.-** Asociatividad, conmutatividad, idempotencia, distributividad, elemento neutro, elemento universal, elemento ínfimo, ley de simplificación o absorción, complementario para la unión, complementario para la intersección y leyes de "de Morgan".

1.5.1 Operaciones

Se tienen las siguientes operaciones entre conjuntos:

- Unión de conjuntos.- Será otro conjunto al que pertenecerán los elementos pertenecientes a A, los elementos pertenecientes a B y, si existen, los elementos que pertenezcan a ambos. Se denota por $A \cup B$, y, como es un conjunto, $(A \cup B) \subset X$; por comprensión podremos definirlo como

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ o bien } x \in B\}$$

Su representación en diagramas de Venn (zona sombreada):

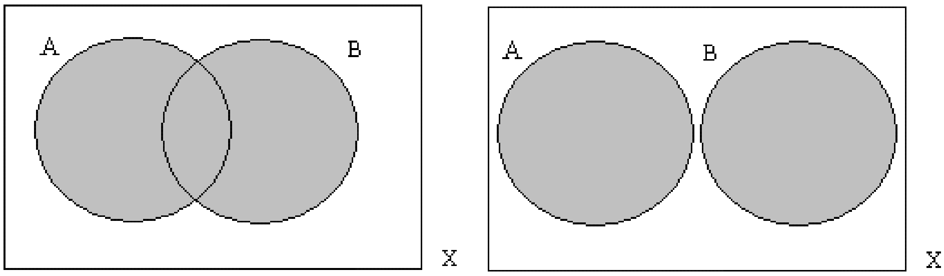


Figura 1.5. Diagramas de Venn para la unión de conjuntos. Izquierda con elementos comunes en la intersección (ver a continuación) y a la derecha sin ellos.

- <u>Intersección de conjuntos.-</u> Será otro conjunto al que pertenecerán los elementos que pertenecen a A y que también pertenezcan a B, es decir, los elementos comunes a ambos. Se denota por $A \cap B$, y, como es un conjunto, $(A \cap B) \subset X$; por comprensión podremos definirlo como

$$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \text{ y también } x \in B\}$$

Su representación en diagramas de Venn (zona sombreada):

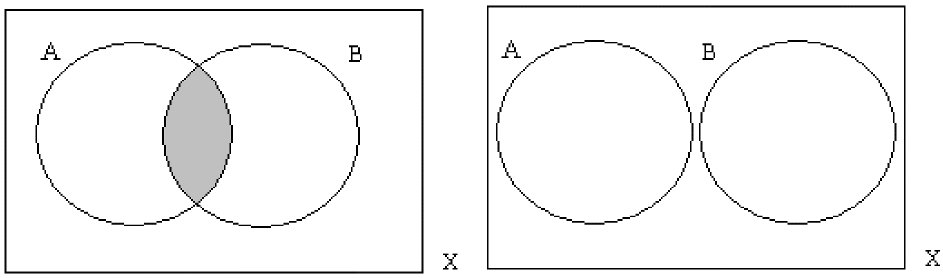


Figura 1.6. diagramas de Venn para la intersección de conjuntos $A \cap B$. Izquierda con elementos comunes en la intersección (ver a continuación) y a la derecha sin ellos

Se dice que dos c**onjuntos** son **disjuntos** si su intersección es el conjunto vacío, es decir, cuando no tienen elementos en común (representado en el diagrama de Venn de la derecha en la figura 1.7)

- <u>Complemento de un conjunto A.</u>- Si $A \subset X$, entonces el complementario de A es el conjunto de todos los elementos de X que no pertenecen en A. Se puede denotar con: nA, ~A, A’ o $\bar{A}$.

Por compresión podremos definirlo como

$$\bar{A} = \{ x \,/\, x \in X \text{ y } x \notin A \}$$

Y su representación en diagramas de Venn (zona sombreada):

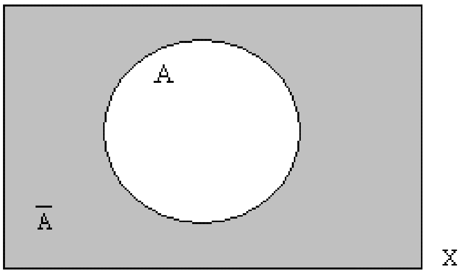


Figura 1.7. Diagrama de Venn para el complementario de un conjunto A

- Diferencia de conjuntos.- La diferencia de A-B es un conjunto al que pertenecen todos los elementos de A que no pertenecen a B.

  Si A y B son disjuntos, $A \cap B = \emptyset$, entonces $A-B = A$

  Si A y B no son disjuntos, $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A-B = A - (A \cap B) = A \cap \bar{B}$ (zona sombreada oscura)

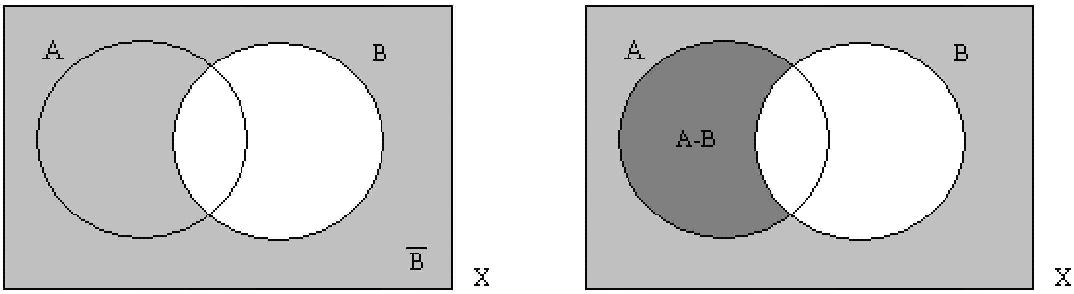


Figura 1.8. Diagrama de Venn para diferencia de conjuntos, donde $A \cap B \neq \emptyset$

De donde podremos afirmar que $A-B \subset A$ (en la otra notación $A-B \subseteq A$).

La diferencia entre conjuntos la podremos definir por comprensión como

$$A-B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

1.5.2. Propiedades

Para la unión, intersección y complementario tenemos una serie de propiedades:

- Asociatividad
  - Para la unión $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - Para la intersección $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Comutatividad
  - Para la unión $A \cup B = B \cup A$
  - Para la intersección $A \cap B = B \cap A$
- Idempotencia
  - Para la unión $A \cup A = A$
  - Para la intersección $A \cap A = A$
- Distributividad
  - De la intersección respecto de la unión
    $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - De la unión respecto de la intersección
    $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Elemento neutro
  - Para la unión es el conjunto vacío. Para cualquier $C \subset X$, $C \cup \emptyset = C$
  - Para la intersección es el conjunto universal. Para cualquier $C \subset X$, $C \cap X = C$

- Elemento universal
    - Para la unión $A \cup X = X$ (ley de dominación)
    - Para la intersección $A \cap X = A$ (ley de identidad)
- Elemento ínfimo
    - Para la unión $A \cup \emptyset = A$ (ley de identidad)
    - Para la intersección $A \cap \emptyset = \emptyset$ (ley de dominación)
- Ley de simplificación o absorción
    - Unión-intersección $A \cup (B \cap A) = A$

      Ejemplo 1.13

      Si $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b,d\}$, entonces $B \cap A = \{a,b\}$

      y $A \cup (B \cap A) = \{a,b,c\} \cup \{a,b\} = \{a,b,c\}$

      --
    - Intersección- unión $A \cap (B \cup A) = A$

      Ejemplo 1.14

      Si $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{a,b,d\}$, entonces $B \cup A = \{a,b,c,d\}$

      y $A \cap (B \cup A) = A = \{a,b,c\} \cap \{a,b,c,d\} = \{a,b,c\}$

      --
- La unión de un conjunto con su complementario es el conjunto universal.

Dado A y $\bar{A}$, $A \cup \bar{A} = X$

- La intersección de un conjunto con su complementario es el conjunto vacío (son disjuntos por definición)

Dado A y $\bar{A}$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$

- Leyes "de Morgan"
    - Respecto de la unión de complementarios $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
    - Respecto de la intersección de complementarios $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

1.5.3. Generalización de las operaciones

Las definiciones que se han formulado para las operaciones lo han sido con dos conjuntos. Estas se pueden generalizar para varios conjuntos (es fácil demostrarlo con las propiedades antes expuestas). Así dados n conjuntos, A_1, A_2, … A_n, donde todos pertenecen al conjunto universal X (formalmente, para todo $A_i \subset X$ donde $1 \leq i \leq n$) podemos definir las operaciones

- La unión de estos conjuntos será el conjunto de los elementos que pertenecen a cada conjunto A_i y los elementos comunes entre ellos. Esta unión se denota por $\bigcup \{ A_i / A_i \subset X \}$ (sombreado oscuro figura 1.9. izquierda).

- La intersección de estos conjuntos será el conjunto de todos los elementos que pertenecen a todos y cada uno de los conjuntos A_i . Esta intersección se denota por $\bigcap \{ A_i / A_i \subset X \}$ (sombreado oscuro figura 1.9 derecha)

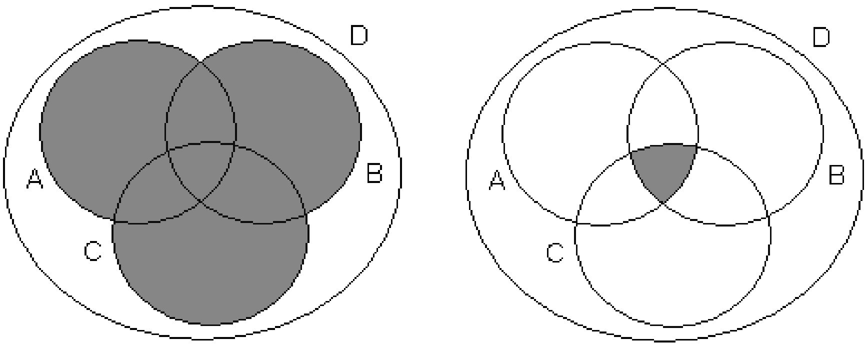


Figura 1.9. Unión (izquierda) e intersección (derecha) de varios conjuntos

1.5.4. Convenio de precedencia para las operaciones

Para evitar la ambigüedad en una expresión con conjuntos cuando no se dispone de paréntesis, se va a fijar una precedencia de operaciones[1], siendo, de mayor a menor: Pertenencia de un elemento a un conjunto, negación de conjunto, intersección, unión, diferencia.

Ejemplo 1.15.

Supongamos la siguiente expresión de conjuntos

$$\sim A \cup B \cap C$$

Esta, si añadimos paréntesis, es equivalente a

$$(\sim A) \cup (B \cap C)$$

--

1.6 CONJUNTO ESPECIAL: PARTICIONES DE UN CONJUNTO

Una vez que hemos visto las operaciones con conjuntos, ya podemos definir lo que es un conjunto "particiones" de otro conjunto. Sea A un conjunto y sea el conjunto E $=\{A_1, A_2, A_3, \ldots A_n\}$, donde cada A_i es un subconjunto de A ($A_i \subset A$ para

[1] Este orden de precedencia puede variar si se consultan otros autores.

$1 \leq i \leq n$), es decir $E \subset \mathcal{P}(A)$. **E es una partición** del conjunto A **si cumple todas** las siguientes condiciones:

- Para cada subconjunto A_i de A que pertenece a P**,** se cumple que $\mathbf{A_i \neq \emptyset}$, es decir, que E es un **conjunto de subconjuntos no vacíos** de A.

- Para cada subconjunto de A que pertenece a E, se cumple que $\bigcap \{ A_i / A_i \subset A \} = \emptyset$, es decir que **todos** los subconjuntos **son disjuntos entre ellos**.

- Se cumple que $\mathbf{A = \bigcup \{ A_i / A_i \subset A \}}$**,** es decir, que **la unión de todos** los subconjuntos de A que pertenecen a E sea **igual al conjunto A**.

Ejemplo 1.16

Dado un conjunto cualquiera A, y su conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$, de todos los subconjuntos posibles, se puede hacer una partición de $\mathcal{P}(A)$ según la cardinalidad de los conjuntos. De esta manera tendremos una parte de cardinalidad cero, otra de cardinalidad 1, otra de cardinalidad 2,…. Y una última de cardinalidad $|A|$.

- Ninguna de las partes es vacía, es decir, todos los $|A|$ conjuntos de subconjuntos tienen al menos un elemento.

- Cada subconjunto del conjunto potencia está solo en una categoría, por lo que cada parte es disjunta de las demás.

- La unión de todas las partes es el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$.

--

Más adelante se verá la correlación de este conjunto con ciertas propiedades de las relaciones entre conjuntos.

1.7. PRINCIPIO DE ADICCION. CARDINAL DE LA UNIÓN

Dados varios conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, con un número finito de elementos y caracterizados porque **la intersección dos a dos es el conjunto vacío** (es decir, entre todos ellos no hay elementos comunes), entonces se cumple que el **cardinal de la unión de estos conjuntos, es la suma de los cardinales de los conjuntos**; formalmente

Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ donde $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i,j \in \{1,2,3\ldots n\}$ / $i \neq j$

y $|A|$ el cardinal de A (recordar, es el número de elementos de A).

$| A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n | = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|$

(Se demuestra por inducción)

Cuando se proponga, más adelante, el producto cartesiano se definirá el principio del producto y en el capítulo siguiente veremos la cardinalidad de varios conjuntos no disjuntos (principio de inclusión y exclusión para el que necesitamos definir primero los principios de la combinatoria).

1.8. PRINCIPIO DE LA DISTRIBUCIÓN

Dados k elementos, tenemos que distribuirlos uniformemente entre m conjuntos. Entonces se da el caso de que:

- Si $k < m$, entonces habrá k conjuntos con 1 elemento y m-k conjuntos vacíos.
- Si $k = m$, entonces todos los conjuntos tendrán exactamente un elemento.
- Si $2m > k > m$, entonces habrá k-m conjuntos con 2 elementos y 2m-k conjuntos tendrán un elemento.

…de manera general

- Si $k = pm$ y $p \in \{0,1,2,3\ldots n\}$, entonces todos los conjuntos tendrán p elementos

- Si $pm > k > (p-1)m$ y $p \in \{0,1,2,3\ldots n\}$, entonces habrá , $[k - (p-1)m]$ conjuntos tendrán p elementos y $(pm - k)$ conjuntos tendrán p-1 elementos.

(se demuestra por inducción)

Ejemplo 1.17

Distribuir diez elementos entre tres conjuntos: Así $k = 10$, $m = 3$, y calculamos p para que $pm > k > (p-1)m$

$$4m>k> (4-1)m \rightarrow p = 4$$

Así habrá $[k-(p-1)m] = [10 - (3)3]=1$ conjunto con 4 elementos
y
$pm-k = 4(3)-10=2$ conjuntos con 3 elementos

--

CAPÍTULO 2.- RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

2.1. SECUENCIA Y TUPLA

Como ya se ha dicho, en un conjunto el orden en que se presentan sus elementos es irrelevante. Sin embargo una **secuencia** es una **colección** (finita o infinita) de objetos dados en **un orden**. Una **tupla** es una colección **finita y ordenada** de objetos (las tuplas son un subconjunto de las secuencias o sucesiones).

En general, una colección finita y ordenada de n objetos la llamamos n-tupla, o simplemente tupla. Una n-tupla se denota con n elementos separados por comas y todos ellos encerrados entre paréntesis.

Un caso especial de tupla es el **par ordenado,** en ocasiones llamada dupla, en la que son dos elementos ordenados, encerrados entre paréntesis. Una 3-tupla la llamamos *terna*, 4-tupla es una *cuádrupla*, 5- tupla es una *quíntupla*...

Si dos tuplas tienen los mismos elementos, pero en distinto orden, entonces son tuplas distintas.

$$(a,b,c) \neq (a,c,b)$$

Se verá una introducción más detallada sobre las secuencias infinitas después de los conjuntos infinitos.

2.2. PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de dos conjuntos, denotado con A x B, **es un conjunto de pares ordenados,** el cual está formado por TODOS

LOS PARES ORDENADOS POSIBLES en los que el primer elemento del par pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

Sean dos conjuntos A ={1,2,3} y B ={a,b}. Podemos representar el producto cartesiano de dos conjuntos de las siguientes maneras (para más de dos conjuntos se describirán más adelante los diagramas de árbol, que son más legibles que las coordenadas, tablas o los diagramas de Venn):

- En forma textual, en extensión:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

- En forma textual, por comprensión:

$$A \times B = \{(numero,letra) \; / \; numero \in A, \; letra \in B\}.$$

- Gráficamente con un eje cartesiano, donde las ordenadas son los elementos de un conjunto y las abcisas los elementos del otro y siendo sus intersecciones los pares del producto cartesiano

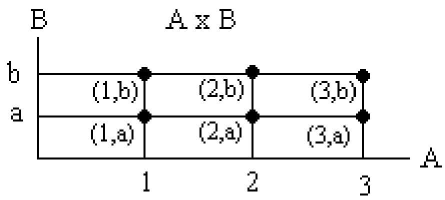


Figura 2.1. Producto cartesiano representado con un eje cartesiano

- Gráficamente con una tabla, cuyas entradas de las filas son los elementos del primer conjunto, las entradas de las columnas son los elementos del segundo conjunto y sus celdas el par correspondiente (su creación es inmediata a partir del eje cartesiano anterior).

B **A**	**a**	**b**
1	(1,a)	(1,b)
2	(2,a)	(2,b)
3	(3,a)	(3,b)

Figura 2.2. Producto cartesiano representado con una tabla

- Gráficamente, con los diagramas de Venn. (si el producto cartesiano fuera de más de 3 conjuntos, el diagrama puede llegar a ser ilegible).

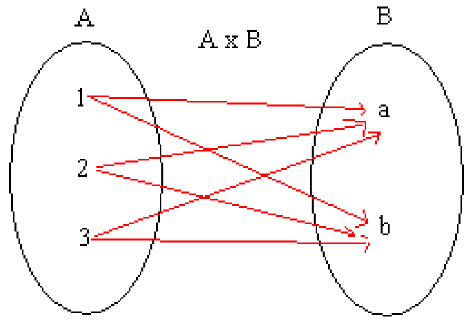


Figura 2.3. Producto cartesiano representado con diagramas de Venn

Esta definición de producto cartesiano se puede generalizar de manera que el *producto cartesiano de n conjuntos* es otro conjunto, este formado por TODAS LAS N-TUPLAS POSIBLES en las que *el primer elemento pertenece al primer conjunto, el segundo elemento al segundo conjunto,….y el elemento n de la tupla pertenece al conjunto n.*

Ejemplo 2.1.

Representar el producto cartesiano de los conjuntos

A={a,b} B={1,2} C = {+,*}.

- En extensión

A x B x C={(a,1,+), (b,1,*), (a,2,+), (a,2,*), (b,1,+),(b,1,*), (b,2,+), (b,2,*)}

- Diagrama cartesiano

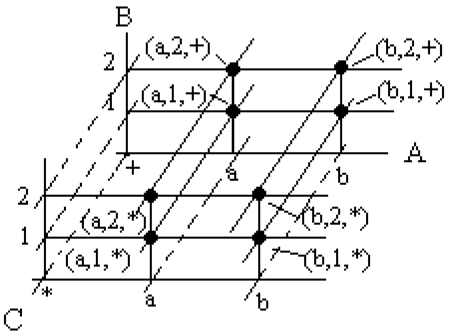


Figura 2.4. Producto cartesiano de tres conjuntos con una representación tridimensional

- Diagramas de Venn

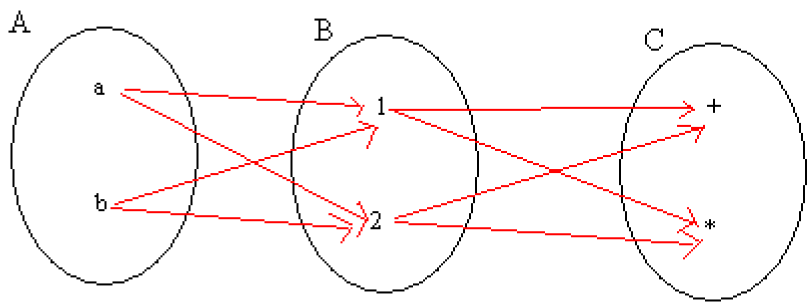


Figura 2.5. Producto cartesiano de tres conjuntos representado con diagramas de Venn

--

Puede darse el caso de que el **producto cartesiano** se produzca sobre conjuntos iguales, es decir, **sobre el mismo conjunto**. Si A es el conjunto, se dice que el producto cartesiano sobre A n veces, denotado como A^n, será el conjunto de todas las n-tuplas en las que todos sus elementos son de A (el primero del primer A, el segundo del segundo A…). Un caso especial será el producto cartesiano de cero conjuntos, A^0, el cual se denotará con la tupla vacía ( ), denotada más comúnmente como λ o como ε.

$$A^0 = \{ \lambda \}$$

Ejemplo 2.2.

Si A = {a,b}, el producto cartesiano sobre A, 4 veces será

A^4= {(a, a, a, a), (a, a, a ,b), (a, a, b, a), (a, a, b, b), (a, b, a, a), (a, b, a, b), (a, b, b, a), (a, b, b, b), (b, a, a, a), (b, a, a, b), (b, a, b, a), (b, a, b, b), (b, b, a, a), (b, b, a, b), (b, b, b, a), (b, b, b, b)}

--

2.3. PRINCIPIO DEL PRODUCTO

Dados varios conjuntos A_1, A_2, A_3, …, A_n, con un número finito de elementos, decimos que la **cardinalidad del producto cartesiano** de todos ellos es igual al **producto de los cardinales de cada uno de los conjuntos**

$$|A_1 \text{ x } A_2 \text{ x } A_3 \text{ x} \dots \text{ x } A_n| = |A_1| \text{ x } |A_2| \text{ x } |A_3| \text{x} \dots \text{x } |A_n|$$

(se demuestra por inducción)

Con este principio ya podemos calcular el número de pares ordenados (cardinal del producto cartesiano) para los conjuntos A y B definidos al comienzo del punto anterior, de manera que si m=3 y n=2, |A x B| = 6 (que son justo los que podemos contar en la tabla de la figura 2.1.).

Ejemplo 2.3

Tenemos la terna (a, b, c) donde a ∈ B, un conjunto de 5 bolas de colores, b ∈ C, un conjunto de 3 cubos de colores y c ∈ L, un conjunto de 2 cilindros de colores. ¿Cuántas posibles ternas tendremos de la forma (bola, cubo, cilindro)?

Lo que hacemos es el producto cartesiano de los tres conjuntos, así

|bola|=5, |cubo|=4, |cilindro|=3,

Aplicando el principio del producto |bola x cubo x cilindro|= 5 x 3 x 2 = 30

Tenemos 30 posibles ternas de la forma (bola, cubo, cilindro).

--

2.3.1. Diagrama de árbol para el producto cartesiano

El diagrama de árbol es una representación gráfica (un grafo que definiremos en el capítulo 3) de todas las posibles k-tuplas que pertenecen al producto cartesiano de k conjuntos.

Para ello:

1.- Dibujamos un punto a la izquierda del diagrama. Será la raíz del árbol.

2.-Para cada uno de los elementos del primer conjunto (posición 1 de la k-tupla), sale un arco. Esto es lo que se llaman arcos de primera generación.

3.- Etiquetamos el extremo de cada arco con cada uno de los elementos del primer conjunto del producto cartesiano (luego veremos que se llaman vértices del grafo).

4.- Para cada una de estas etiquetas de los arcos de primera generación, saldrán también tantos arcos como elementos posibles del segundo conjunto. Estos se llaman arcos de segunda generación.

5.- Etiquetamos el extremo de cada arco de segunda generación, con cada uno de los elementos del segundo conjunto.

… Así sucesivamente hasta

6.- Para cada una de los arcos de generación (k-1), saldrán tantos arcos como elementos tenga el conjunto k del producto cartesiano. Estos son arcos de k generación.

7.- Etiquetamos el extremo de cada arco de k generación, con cada uno de los elementos del conjunto k.

El número de arcos de k-generación será el número de tuplas del producto cartesiano de los k conjuntos, y cada tupla estará representada por la secuencia de etiquetas desde la raíz hasta un extremo de k-generación.

Ejemplo 2.4

Sigamos con el ejemplo de conjunto B de 5 bolas de colores, C un conjunto de 3 cubos de colores y L un conjunto de 2 cilindros de colores. Vamos a dibujar todas las ternas posibles para estos tres conjuntos, mediante el diagrama de árbol, es decir, dibujar todas las ternas que pertenecen al producto cartesiano B x C x L. En este caso k = 3:

- Vamos a llamar B1, B2, B3, B4, B5 a cada elemento de B, C1, C2, C3 a cada elemento de C y L1, L2 a los dos elementos de L.

- Para cada elemento de B sale un arco de primera generación. Cada uno de estos se etiqueta con cada uno de los elementos de B = { B1, B2, B3, B4, B5}.

- Para cada una de esos arcos de primera generación, saldrán también tantos arcos como elementos posibles del conjunto C. Cada una de estas se etiqueta con cada uno de los elementos de C = { C1, C2, C3}.

- Para cada una de los arcos de segunda generación (las de C), sale un arco por cada elemento de L, que se etiqueta con cada elemento de L= {L1, L2}.

- Cada terna se compondrá por la etiqueta de un arco de primera generación, seguida de una etiqueta de segunda generación y seguida de una etiqueta de tercera generación. Una terna de este ejemplo puede ser la (B4,C2,L1).

- El número de ternas posibles, será el número de arcos de tercera generación, es decir, 30 (que coincide con el cálculo realizado por el principio del producto).

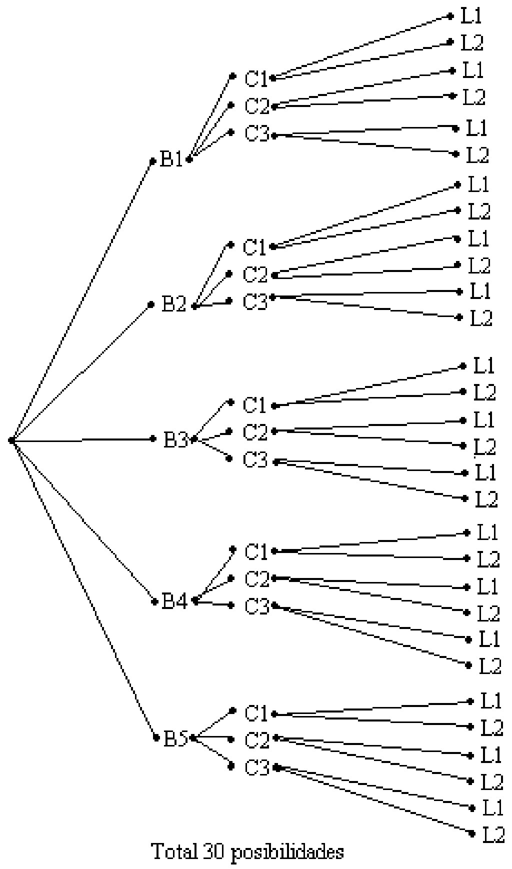


Figura 2.6. Diagrama de árbol para producto cartesiano

--

2.4. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Dados n conjuntos, A_1, A_2, A_3,….A_n , **una relación** n-aria sobre los n conjuntos **es un subconjunto de su producto cartesiano** (A_1 x A_2 x A_3 x..x A_n). Si llamamos R a este conjunto

$R \subset A_1 \text{ x } A_2 \text{ x } A_3 \text{ x .. x } A_n$ y en la otra notación $R \subseteq A_1 \text{ x } A_2 \text{ x } A_3 \text{ x..x } A_n$

O, visto de otra forma

$$R=\{ (a_1, a_2, a_3, .., a_n) / (a_1, a_2, a_3, .., a_n) \in A_1 \text{ x } A_2 \text{ x } A_3 \text{ x...x } A_n \}$$

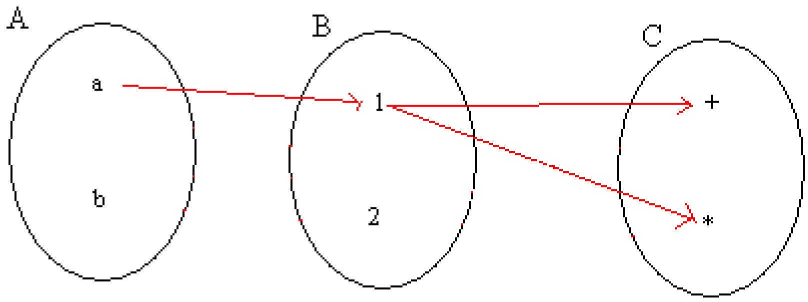


Figura 2.7. Una relación cualquiera del producto cartesiano de la figura 2.5

Si la relación es sobre dos conjuntos, se dice que es una **relación binaria** o **correspondencia**, y entonces decimos que la relación es un subconjunto del producto cartesiano A x B, o lo que es lo mismo, un subconjunto de pares ordenados del producto cartesiano A x B. Se denota por:

$$R \subset A \times B \quad \text{y en la otra notación } R \subseteq A \times B$$

O visto de otra forma, si $a \in A$ y $b \in B$, $(a,b) \in R$, que alternativamente también se denota con a **R** b o como **R**: A←→B.

La relación puede ser sobre el mismo conjunto, es decir, un subconjunto del producto cartesiano A x A; entonces se dice que es una *relación binaria sobre A* ($R \subset A \times A$), denotándolo por R(A).

Ejemplo 2.5

Dado el conjunto A={1, 2, 3, 4, 5}, tenemos una relación binaria sobre A, definida como

$$R= \{ (a,b) \,/\, a,b \in A \text{ y } a < b\}$$

Es decir, el primer elemento de par es menor que el segundo, En este caso, aRb podremos representarla como a < b, siendo los siguientes pares

$$R= < = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

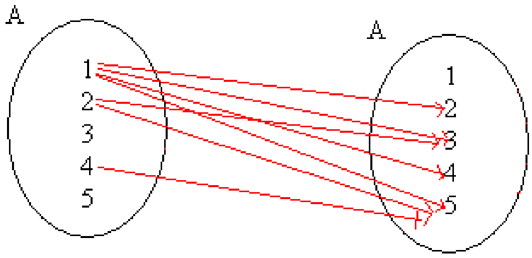


Figura 2.8 Relación < de A en A

--

Dada la relación R $\subseteq$ A x B, al conjunto A se le llama **conjunto inicial o espacio del dominio** y al conjunto B **conjunto final, espacio del rango o espacio del recorrido**. El subconjunto de elementos de A que están en algún par de la relación se le llama conjunto **origen, dominio o campo de existencia** y el subconjunto de elementos de B que están en algún par de la relación se le llama conjunto **imagen, rango o recorrido**.

El dominio se denota por D(R) o domR, y se define formalmente

$$D(R) = \{a \ / \ a \in A \text{ y } (a,b) \in R\}$$

El rango se denota por Rango (R) o Ran R y se define formalmente

$$\text{Rango } (R) = \{ b \ / \ b \in B \text{ y } (a,b) \in R\}$$

Ejemplo 2.6.

Dada la relación del ejemplo anterior, podemos decir que el dominio de la misma, denotado como D (R) o dom R, será:

$$D\ (R) = \{1, 2, 4\}$$

Y el rango, denotado como Rango(R) o Ran R, será

$$\text{Rango}(R) = \{2, 3, 4, 5\}$$

Y por último podremos decir que el espacio del dominio (el conjunto inicial) y el espacio rango (el conjunto final) son el mismo, el conjunto A.

--

Cualquier relación de n-aria se puede convertir en una relación binaria. Dada la relación n-aria $R \subset A_1 \times A_2 \times A_3 \times .. \times A_n$, y la n-tupla $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in R$, esta se puede sustituir por una relación binaria S, donde el conjunto inicial (espacio del dominio) está formado por el producto cartesiano de los A_{n-1} conjuntos y el espacio de rango formado por los elementos de A_n. La relación S será el conjunto de pares ordenados donde el primer elemento es una (n-1)-tupla y el segundo elemento será un elemento de $a_n \in A_n$, siempre que en R exista la n-tupla $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in R$.

$$R \subset A_1 \times A_2 \times A_3 \times .. \times A_n \qquad \equiv \qquad S: A_1 \times A_2 \times A_3 \times .. \times A_{n-1} \leftarrow\rightarrow A_n$$

2.4.1. Representación de relaciones

Dado que una relación es un conjunto, se podrá representar con los mismos métodos que se han descrito hasta ahora (por ejemplo, ver figura 2.8).

Ya se ha dicho que *una correspondencia es lo mismo que una relación binaria*. Cuando se trabaja con conjuntos y representaciones con diagramas de Venn, y dados dos conjuntos A y B, es más común el nombre de *correspondencia del conjunto A en B* para la relación, conjunto origen para el dominio y conjunto imagen para el rango (los términos dominio y rango son los que se utilizan cuando no se utilizan diagramas de Venn en su representación).

Ejemplo 2.7.

Dada la correspondencia (relación) C={ (1,a),(2,a),(2,b)}, donde podemos ver que $C \subset \{A \times B\}$ (ver figura 2.5) , su representación con diagramas de Venn sería

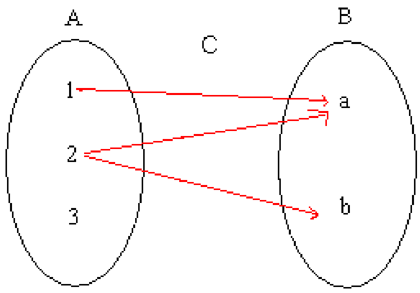


Figura 2.9. Diagramas de Venn de una correspondencia C

Donde origen (dominio) = {1,2} e imagen (rango) = {a,b}

--

Se dispone de un método de representación adicional si la relación binaria es sobre un conjunto: mediante un diagrama de circunferencias y arcos (denominado pseudografo dirigido y que definiremos más adelante). Cada circunferencia (llamado vértice o nodo) se etiqueta (dentro o fuera) con el nombre de cada elemento del conjunto A y, para dos elementos cualesquiera a y b de A, el par (a, b) se representa con una flecha (llamada arista o arco dirigido) que sale de a y entra en b. El par (a, a) se representa con un arco que sale y entra en el mismo nodo. A este arco se denomina lazo o bucle.

Ejemplo 2.8.

Sea el conjunto A = {a,b,c,d} y sea R= {(a,a),(a,b),(b,c)(c,b)(c,c)} una relación cualquiera sobre A.

Una representación gráfica de esta relación sería

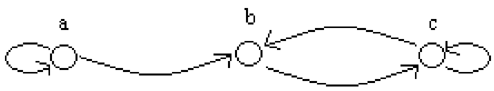


Figura 2.10. Pseudografo dirigido correspondiente a R

--

2.5. RELACIONES (CORRESPONDENCIAS) ESPECIALES

Algunas de ellas se pueden deducir de su condición de conjunto:

- **Relación universal**.- La que contiene todas las n-tuplas, es decir, el producto cartesiano.

- **Relación vacía**.- La que no contiene ninguna n-tupla. Se denota también con el símbolo del conjunto vacío Ø.

- **Relación complementaria**.- Dado el producto cartesiano, es el conjunto de n-tuplas del mismo que no están en la relación. Se denota igual que con los conjuntos: nR, ~R, R' o $\overline{R}$.

- **Relación identidad**.- Dada una relación binaria sobre un conjunto A, es el conjunto de pares ordenados que cumplen que sus 2 elementos son iguales, para todos los elementos del conjunto. Se denota por I_A. A esta relación también se la llama la *relación diagonal*, pues representa los elementos de la diagonal en la representación tabular. Por ello también es normal denotarla como I_d.

Otras, que se verán a continuación, son propias de las relaciones, como la relación inversa, la relación ampliada y la reducida.

2.5.1. Relación (correspondencia) inversa de una dada

Dada una relación (correspondencia) C del conjunto A en B, la relación inversa es la relación (correspondencia) de B en A, la cual es un conjunto de pares ordenados donde **si en C existe el par (a,b), en la inversa existe el par (b,a),** es decir, son los mismo pares pero invertidos. Se denota por C^{-1}, aunque otro autores también la denotan como $C^{\sim}$. Formalmente

$$C^{-1} = \{(b,a) / b \in B, a \in A \text{ y } (a,b) \in C \}$$

Ejemplo 2.9

Dada la relación C={ (1,a),(2,a),(2,b)}, la relación inversa será

$$C^{-1}= \{(a,1),(a,2),(b,2)\}$$

--

A esta relación algunos autores la denominan *opuesta*, sin embargo es un término ambiguo, pues otros utilizan este término para describir la relación complementaria. Aclarémoslo con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.10

Supongamos, de nuevo, la relación "menor" del ejemplo 2.5. Su relación inversa será la relación "mayor"

$$R^{-1} = \{ (b,a) / a,b \in A \text{ y } a > b\}$$

Es decir,

$$R^{-1}= > = \{(2,1),(3,1),(4,1), (5,1), (3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$$

Sin embargo, en otros ámbitos nos podrían preguntar por cuál es la relación *opuesta* a la relación "menor", a lo que se podría responder que "mayor o igual", la cual resulta ser la relación complementaria y no la inversa. Por ello, aquí no se utilizará el término *opuesta*.

--

Ejemplo 2.11.

¿Cuál es la relación inversa y complementaria de la relación vacía? ¿Y de la relación universal?

- Inversa de la relación vacía.- si aplicamos la definición de función inversa será también la relación vacía.

- Complementaria de la relación vacía.- Será la relación universal (pares del producto cartesiano que no están en la relación, es decir, todos).
-
- Inversa de la relación universal.- Si aplicamos la definición, finalmente resultará que también es la relación universal
-
- Complementaria de la relación universal.- Será la relación vacía.

--

2.5.2. Relación (correspondencia) ampliada y reducida

Es normal que los conjuntos inicial (espacio del dominio) y el final (espacio del rango) sean, respectivamente, subconjuntos de otros que los contienen. Como consecuencia de ello es habitual que, una vez fijada una relación, se amplíen (*extiendan*) los espacios, tanto de dominio como de rango a alguno de los superconjuntos a los que pertenece o se reduzcan (*restrinjan*) a subconjuntos suyos.

Tanto en las extensiones como en las restricciones se pueden producir dos casos:

- Extensión o restricción vacía.- Cuando la relación sigue teniendo los mismos elementos. En este caso el dominio y el rango tampoco cambian.

- Extensión no vacía.- Como consecuencia de la ampliación de cualquiera de los espacios (o los dos) se añaden nuevos pares a la relación, ampliándose, además, el dominio y/o el rango.

- Restricción no vacía.- Como consecuencia de la reducción de cualquiera de los espacios (o los dos) se eliminan pares de la relación, y por tanto también hay una reducción del dominio y/o el rango.

2.6. OPERACIONES CON RELACIONES. COMPOSICIÓN

Dado que son conjuntos, tendremos las mismas operaciones que con los conjuntos, esto es, unión, intersección y complementación (esta última ya se ha visto en un ejemplo anterior), a las que añadiremos la **composición de relaciones**. Dadas dos relaciones R y S,

- Unión.- Se define como todos los pares que están en R, que están en S o que están en las dos, formalmente

$$R \cup S = \{ (a, b) / (a, b) \in R \text{ o } (a, b) \in S\}$$

  Es de reseñar que la unión puede llevar asociada una ampliación del dominio y/o del rango y, por tanto, una ampliación de los espacios de dominio y/o de rango.

- Intersección.- Se define como todos los pares que están en R y que también están en S, formalmente

$$R \cap S = \{ (a, b) / (a, b) \in R \text{ y } (a, b) \in S\}$$

  Es de reseñar que la intersección puede llevar asociada una reducción del dominio y/o rango.

- Composición.-. Supongamos los conjuntos A, B, C, y las relaciones aRb y bSc, donde $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$. Dados un par $(a , b) \in R$ y un par $(b', c) \in S$, R compuesta con S (denotado R o S)[2] es el conjunto de pares de la forma (a , c), esto es, el primer elemento perteneciente al conjunto origen de R y el segundo elemento perteneciente al conjunto imagen de S, si y solo si b = b'. Formalmente

$$R \text{ o } S = \{(a , c) / (a , b) \in R, (b', c) \in S \text{ y } b = b' \}$$

[2] El orden de los operandos es el natural. Veremos que en la composición de funciones es el orden contrario.

Ejemplo 2.12

Dados los conjuntos y sus relaciones

A={1,2,3} ; B={A, a, B, b, C, c} ; C={?, %, $}

R= {(1,b),(3,c)} ; S={(B,?),(b,$),(c,%)}

Las composiciones de relaciones

R o S= {(1,$),(3,%)}

S o R = Ø

O visto gráficamente, R o S

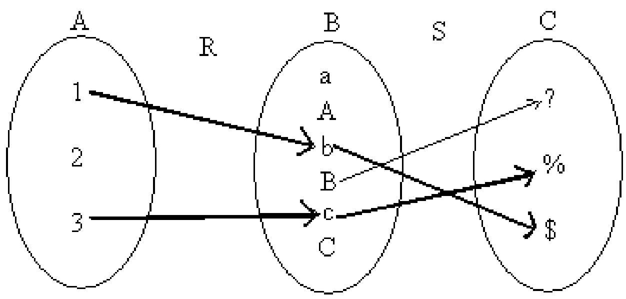


Figura 2.11. Composición de relaciones con diagramas de Venn

--

Tal como se ha mostrado en el ejemplo anterior, **la composición** de relaciones **NO es conmutativa**. Sin embargo, **sí es asociativa** (no se demostrará). Dadas R, S, T

R o S o T = (R o S) o T = R o (S o T)

La operación composición será la de prioridad más baja en la precedencia de operadores; de mayor a menor:

Precedencia: complementación, intersección, unión y composición

2.7. RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y DE ORDEN.

Antes de definir lo que son las relaciones de equivalencia y de orden, primero debemos definir las propiedades de las relaciones binarias sobre un conjunto A. Dados a, b, c $\in$ A y la relación R sobre A:

- **Reflexiva**.- R es reflexiva si **(a,a) $\in$ R para todo valor a $\in$ A** (cada elemento de A está relacionado consigo mismo). En la representación gráfica se verá un pseudografo de con un bucle en cada nodo. Un claro ejemplo que cumple esta propiedad es la relación igualdad antes descrita, dada por la relación identidad (I_A).

- **Irreflexiva o no-reflexiva**.- R es irreflexiva si **(a,a) $\notin$ R para todo valor de a $\in$ A** (ningún elemento de A está relacionado consigo mismo). Se puede considerar opuesta a la reflexibilidad. En la representación gráfica se verá un grafo sin bucles.

- **Arreflexiva**.- R es arreflexiva si (a,a) $\notin$ R para algún valor a $\in$ A (algún elemento de A no están relacionados consigo mismo), es decir, si no es reflexiva ni irreflexiva. En la representación gráfica se verá un grafo sin bucles en algunos nodo, pero no en todos.

Ejemplo 2.13

Retomemos la relación del ejemplo 2.8 ¿es reflexiva o irreflexiva?

Analizando el grafo de la figura 2.10, vemos que unos nodos tienen bucles pero otros no. En este ejemplo no se cumple con ninguna de las dos definiciones, por lo que se puede decir que no es ni reflexiva ni irreflexiva, es decir arreflexiva.

--

- **Simétrica.-** Para todo a y b, si existe el par (a,b) $\in$ R, entonces tiene que existir el par (b, a) $\in$ R (si existe un par, existe su simétrico; si no existe el par, no existe su simétrico). Gráficamente veremos que hay una flecha de a hacia b y de b hacia a. En este caso se representa con aristas sin dirección (el grafo es no dirigido).

- **Antisimétrica.**- Para todo a y b, si existe el par (a,b) $\in$ R y existe el par (b,a) $\in$ R, solo puede ser porque a = b. Si a es distinto de b, entonces solo existirá uno de los dos pares (si existe un par, no existe su simétrico; si no existe el par, puede que exista su simétrico). No se puede considerar como la propiedad opuesta a la simetría (ver ejemplo 2.15). Gráficamente veremos que si existe la flecha de a hacia b, no puede existir de b hacia a.

- **Asimétrica.**- Para todo a y b, si existe algún par (a,b) $\in$ R para el que no existe el par (b,a) $\notin$ R (para algún par, su simétrico no pertenece a la relación), y viceversa, si existe algún algún par (a,b) $\in$ R con a $\neq$ b, y existe el par (b,a) $\in$ R. Es decir, ni simétrica ni antisimétrica. En el diagrama se dará esta propiedad si para algún par de elementos de A no hay dos flechas contrarias.

Ejemplo 2.14

Veamos de nuevo la relación del ejemplo 2.8 ¿es simétrica o antisimétrica?
Si analizamos esta relación vemos que para el par (a,b) no hay su simétrico, con lo cual no es simétrica. Pero para el par (b,c) tenemos el par (c,b) por lo que tampoco es antisimétrica; por tanto es asimétrica.

--

Ejemplo 2.15

La relación igualdad (I_A). ¿es simétrica o antisimétrica?
Se puede decir que es simétrica: para todo a, se cumple que a = a
Se puede decir que es antisimétrica: cumple con la definición dada: a = b y b=a pertenecen a la relación solo si a=b, lo que es trivial por la definición de la relación.

--

- **Transitiva.**- Para todo a, b y c, si existe el par (a,b) $\in$ R y existe el par (b,c) $\in$ R, entonces también existe el par (a,c) $\in$ R. El hecho de que no exista (a,b) o no exista (b,c) no significa que no sea transitiva.

- **Intransitiva o no transitiva**.- Para todo a, b y c, si existe el par (a,b) $\in$ R y existe el par (b,c) $\in$ R pero no existe el par (a,c) en la relación.

Ejemplo 2.16

Retomemos la relación del ejemplo 2.5:

$$R= < = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

Analicemos cada uno de los pares y sus relaciones:

- Existe el par (1,2) y el par (2,3) debe existir el par (1,3). Transitivo
- Existe el par (1,2) y el par (2,4), debe existir el par (1,4). Transitivo.
- Para los pares (1,3), (1,5) no existe ningún otro relacionado cuyo primer elemento del par sea 3, 4 ó 5 respectivamente. Transitivo.
- Existe el par (1,4) y el par (4,5), debe existir el par (1,5). Transitivo.
- Para el par (2,3) no existe ningún par cuyo primer elemento sea 3.
- Para los pares (2,5) y (4,5) no existe ningún otro relacionado cuyo primer elemento del par sea 5

Por tanto esta relación R es transitiva.

--

Ejemplo 2.17

Supongamos la relación S = R $\cup$ {(3,4)}. Vemos que existe el par (1,3) y el par (3,4), debe existir el par (1,4). Transitivo. Pero existe el par (2,3) y el par (3,4), pero no el par (2,4), por lo que esta relación es intransitiva.

--

- **Completud, conectada o elementos comparables**.- Para todo a y b del conjunto A existe el par (a,b) $\in$ R o existe el par (b,a) $\in$ R o existen ambos, siendo a $\neq$ b. Una consecuencia de esta propiedad es que una relación completa, es reflexiva. Se verá un ejemplo con las relaciones de orden.

2.7.1. Relaciones de equivalencia

Se dice que una relación es de equivalencia cuando cumple las propiedades **reflexiva, simétrica y transitiva**.

Dada una relación de equivalencia en A, se llama *clase de equivalencia* al conjunto no vacío de elementos de A que están relacionados con otro elemento determinado, a $\in$ A. Se denota

$$[a] = \{b \,/\, (a,b) \in R\}$$

Donde [a] es el representante de la clase de equivalencia. Cada clase de equivalencia es disjunta con las anteriores, es decir, no tienen elementos en común.

Dada una relación R sobre A que es de equivalencia. Se llama conjunto cociente de A, al conjunto de clases de equivalencia. Se denota por A/R, y formalmente

$$A \,/\, R=\{\, [a] \,/\, a \in A \,\}$$

La unión de los elementos de cada clase de equivalencia, es decir, de los elementos del conjunto cociente de A, es el conjunto A.

Para identificar las clases de equivalencia de una relación de equivalencia se procederá como sigue:

- Se coge un primer elemento cualquiera, supongamos a $\in$ A: este será el representante de una primera clase de equivalencia.

- Para cada elemento de los restantes:

    - Si (a,b) $\in$ R, donde a ya es el representante de otra clase de equivalencia, resulta que la clase que pudiera representar b es igual a la anterior, por estar relacionada. Es decir, [b]=[a], y por lo tanto b $\in$ [a].

    - Si (a,b) $\notin$ R, donde a es el representante de otra clase de equivalencia, podremos tomar d como un representante de una nueva clase de equivalencia, [d], ya que no está relacionado con ninguna clase ya representada por otro elemento.

De manera general, una relación que define una **clasificación de este tipo** (conjuntos disjuntos de categorías) **sobre un conjunto** se llama **relación de equivalencia**. El resultado de esta clasificación es el conjunto cociente que es el conjunto de representantes de cada clase.

Una vez dadas las definiciones pasemos a explicar que significa esto con un ejemplo:

Ejemplo 2.18

Suponer un conjunto A de personas y supongamos una relación R “ser amigo de” en dos bandos contendientes (un elemento de A solo puede ser amigo de uno de los dos bandos). Elijamos una persona cualquier “a”. El conjunto de amigos de a será una relación de equivalencia ya que:

- “a” es amigo de sí mismo (reflexiva).

- Si otra persona, “b” es amiga de “a”, entonces “a” es amiga de “b” (simétrica).

- Si una además una persona “b” es amiga de “c”, entonces “c” también es amiga de “a” (transitiva).

Se puede decir que esta es una primera clase de equivalencia representada por “a”, [a].

Elijamos otra persona, “d”. Para determinar si se trata de otra clase de equivalencia:

- Si existe un par (a,d) en la relación, significa que d $\in$ [a].
- Si no existe un par (a,d) en la relación significa que d es el representante de la otra clase de equivalencia [d]. Supongamos este segundo caso.

En este ejemplo solo hay dos clases, dos bandos contendientes, por lo que todos los elementos de A pertenecerán a [a] o a [d].

De esta forma, la clasificación del conjunto cociente será:

$$A/R=\{ [a] , [d]\}, \text{ donde } [a] \cup [d] = A$$

--

Fijémonos en las propiedades del conjunto cociente: Cada conjunto representado no es vacío, son disjuntos y además la unión de todos ellos es el conjunto A. Efectivamente, una relación de equivalencia define un conjunto “particiones” de un conjunto, tal como lo hemos definido anteriormente. Es más, la suposición recíproca también es cierta: un conjunto “particiones” de un conjunto A también define una relación de equivalencia sobre A.

Para ver esto retomemos el ejemplo 1.16. En él se decía que sobre el conjunto potencia se puede realizar una partición según la cardinalidad de los conjuntos. Cada uno de los subconjuntos “partición” constituirá una clase de equivalencia, en cada una de las cuales estarán todos los subconjuntos con el mismo número de elementos (misma cardinalidad). Este conjunto “particiones” será una relación de equivalencia pues se ha definido una clasificación en conjuntos disjuntos.

Ejemplo 2.19

Dado el conjunto A ={a, b, c, d, e} de personas, y la relación R sobre A de “ser amigo de”:

R={(a, a), (b, b),(c, c)(d, d),(e, e), (a, b),(b, a),
(a, c),(c, a),(b, c),(c, b),(d, e),(e, d)}

Es una relación de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva (se deja al lector la comprobación de esta afirmación). Además, podemos obtener dos clases de equivalencia que son.

[a] ={a,b,c} y [d]={d,e}

Donde [a] $\cup$ [d] = A

--

2.7.2. Relaciones de orden

Una relación sobre un conjunto es de orden si esta ordena los elementos de ese conjunto. Podremos tener varios tipos de relaciones de orden:

- **Orden parcial (débil) (relación reflexiva)**.- Si la relación cumple con las propiedades reflexiva, *antisimétrica* y transitiva. Se denota por $\succeq$.

- **Orden parcial estricto (relación irreflexiva)**.- Si la relación cumple con las propiedades *irreflexiva*, antisimétrica y transitiva. Es fácil ver que este orden es la relación anterior a la que se le ha quitado la relación identidad. Se denota por $\succ$.

- **Orden total o lineal**.- Si, además de ser un orden parcial, es completa conectada o comparable (recordar que en esta existe el par (a,b) $\in$ R o existe el par (b,a) $\in$ R o ambos, para <u>todos los elementos</u> del conjunto).

La diferencia entre una relación de orden parcial sobre un conjunto y la de orden total sobre ese mismo conjunto radica en que, en la parcial, no se exige que todos los elementos del conjunto estén relacionados.

La representación gráfica con grafos de un orden parcial estricto se caracterizará por no tener un camino entre nodos que empiece y termine en el mismo nodo (un camino es una secuencia de nodos y arcos en la dirección de las flechas si las hay; en el capítulo dedicado a grafos se verá como se llama esta propiedad). Además en este grafo no será posible encontrar un camino que se repita indefinidamente. Un orden parcial débil se representará con un pseudografo, por lo que sí se podrá entrar en un camino de infinitos pasos, debido a los bucles.

Ejemplo 2.20

Retomemos el ejemplo 2.5. Dado el conjunto A={1, 2, 3, 4, 5}, tenemos una relación binaria sobre A, definida como

$$R= \{ (a,b) \ / \ a,b \in A \text{ y } a < b\}$$

Es decir, el primer elemento del par es menor que el segundo, En este caso, aRb podremos representarla como a < b, siendo los siguientes pares

$$R= < = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

Podemos decir que la relación es de orden estricto ya que es:

- Irreflexiva, ya que no hay ningún elemento de la relación identidad.
- Antisimétrica.- Dado cualquier par no está su inverso
- Transitiva.- Se demostró en el ejemplo 2.16.
- No es completa, ya que tenemos, por ejemplo, el par (2,4) ni el par (4,2) luego no será una relación de orden total.

Su representación con un grafo

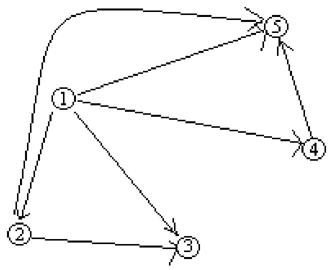


Figura 2.12. Grafo del orden parcial estricto sobre A

En el que vemos que no podemos encontrar ninguna secuencia de nodos y aristas que empiece y acabe en el mismo nodo.

--

Ejemplo 2.21.

Dado el conjunto A={1, 2, 3, 4, 5}, tenemos una relación binaria sobre A, definida como

$$S = \{ (a,b) \; / \; a,b \in A \text{ y } a \leq b\}$$

Es decir, el primer elemento de par es menor o igual que el segundo, En este caso, aRb podremos representarla como $a \leq b$, siendo los siguientes pares

$$S = \leq = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4),(5,5),(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

Podemos decir que la relación es reflexiva (contiene la relación identidad), antisimétrica y transitiva y por tanto es una relación de orden parcial (débil). Además no es completa (al igual que antes, falta el par (2,4) o el (4,2), luego no será una relación de orden total. Su representación con un grafo

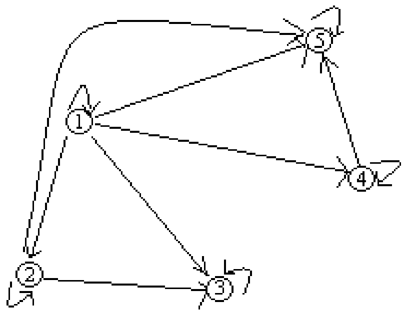


Figura 2.13. Grafo de Orden parcial (débil) sobre A

En el que vemos que no podemos encontrar ninguna secuencia de nodos y aristas que empiece y acabe en el mismo nodo, pero, debido a los bucles, podríamos tener alguna secuencia infinita, por ejemplo: 1-2-3-3-3-3-3……

--

Ejemplo 2.22.

Hemos dicho que las dos relaciones anteriores no son de orden total. Para que la relación del ejemplo anterior fuera de orden total, sería necesario que estén relacionados todos los elementos con todos en uno u otro sentido o los dos (en este caso solo es un sentido):

$$R= \leq = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

Donde para todo elemento de A, existe (a,b) o (b,a)

--

Se dice que un **conjunto está parcialmente ordenado** si sobre él se puede establecer una relación de **orden parcial (débil).** Por regla general, si no se especifica que sea estricto o total, un orden parcial se considerará débil**.**

Dado un conjunto parcialmente ordenado, la relación inversa a la de orden parcial también es de orden parcial. Así mismo, dada una relación restringida sobre una de orden parcial también será de orden parcial.

Ejemplo 2.23.

Siguiendo con el ejemplo 2.20, la relación inversa de R= < es R^{-1}= > :

$$R^{-1} = > = \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (3,2), (5,2), (5,4)\}$$

También es una orden parcial estricto.

Así mismo, en el ejemplo 2.21, la relación inversa de S= ≤,, es S^{-1}= ≥ :

$$S^{-1} = \geq = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (3,2), (5,2), (5,4)\}$$

Que también es un orden parcial (débil).

--

La noción de conjunto parcialmente ordenado es imprescindible en las disciplinas de informática, ya que garantiza que ciertos métodos sean finitos.

2.7.3. Propiedades de la inclusión de conjuntos

Como se dijo cuando se definió la inclusión de conjuntos, esta es una relación entre conjuntos. La inclusión de conjuntos cumple con las siguientes propiedades:

- Reflexiva.- $A \subset A$. Obvia, por la segunda condición de inclusión.
- Antisimétrica.- $A = B$ es cierto si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$, por la segunda condición de inclusión.
- Transitiva.- Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$. Por la primera condición de inclusión. Por la segunda condición es trivial: si $A = B$ y $B = C$ entonces $A=C$.

Se dice que dos conjuntos son **comparables** si hay una *relación* de inclusión entre ellos, es decir, dados A y B dos conjuntos, son comparables si $A \subset B$ o si $B \subset A$ (esta definición coincide con la de completud). Dado que no todos los conjuntos son comparables, la inclusión de conjuntos define un orden parcial de inclusión.

Ejemplo 2.24

Volvamos al ejemplo de la academia, es decir, Sea A={alumnos de matemáticas de una academia}, C={animales de cuatro patas} y X, el conjunto universal de alumnos de la academia.

A y C no son comparables, ya que no hay animales de cuatro patas que asistan a clase, ni alumnos que tengan cuatro patas. Es decir, son elementos de distinta naturaleza. Por otro lado, es obvio que A y X son comparables, pues $A \subset X$ (son elementos de la misma naturaleza: alumnos)

--

Es más, podemos decir que la inclusión de subconjuntos propios es un orden estricto, ya que será irreflexiva, antisimétrica y transitiva.

Con estas propiedades, junto con la definición de pertenencia de un elemento a un conjunto, son las herramientas que utilizaremos para demostrar la inclusión de un conjunto en otro. Así:

- Para demostrar que $A \subset B$, hay que demostrar que todos los elementos de A pertenecen a B.

- Para demostrar que $A \not\subset B$, basta con demostrar que existe un elemento de A que no pertenece a B.

- Para demostrar que $A = B$, hay que demostrar que se cumple la propiedad antisimétrica, esto es, que se cumple $A \subset B$ (todos los elementos de A pertenecen a B) y se cumple $B \subset A$ (todos los elementos de B pertenecen a A).

2.7.4. Elementos importantes en las relaciones de orden

Suponer a y b dos elementos de un conjunto y R una relación de orden sobre este conjunto.

- cotas superiores.- cualquier a para el que exista el par aRb, es una cota superior de b.

- Cotas inferiores.- cualquier b para el que exista el par aRb, es una cota inferior de a.

- Elementos maximales.- Los que no siguen a ningún elemento en el orden (pueden no ser únicos). Es decir, la mayor de las cotas superiores: si a es el elemento maximal, entonces no debe existir el par aRb, para un b cualquiera.

- Elementos minimales.- Los que no tiene ningún elemento que le siga (pueden no ser únicos). Es decir, la menor de las cotas inferiores: si b es el elemento minimal, entonces no debe existir el par aRb, para un a cualquiera.

Ejemplo 2.24.

Dado el conjunto A={1, 2, 3, 4, 5}, tenemos una relación binaria, que ya hemos visto anteriormente que es de orden parcial , sobre A, definida como

$$R= \{ (a,b) / a,b \in A \text{ y } a \leq b\}$$

conteniendo los siguientes pares

$$R= \leq = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4),(5,5),(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

- Cotas superiores.- 1 es cota superior de 2, 3, 4 y 5; 2 es cota superior de 3 y 5 (observar que no existe (2,4)).

- Cotas inferiores.- 5 es cota inferior de 1, 2 y 4 (observar que no existe (3,5))
- Elemento máximal.- El 1.
- Elementos maximales.- En este caso hay dos: el 3 y el 5.

Se puede observar que el resultado obtenido es contrario a lo que en un principio se pudiera pensar, debido a nuestra intuición sobre la ordenación de los números naturales; esa intuición sería correcta para la relación S = $\geq$.

--

2.7.5. Diagrama de Hasse

El diagrama de Hasse es un grafo que muestra claramente la relación de orden de un conjunto. Para describirlo primero debemos definir algunos puntos.

Suponer a, b y c tres elementos distintos de un conjunto y R una relación de orden sobre este conjunto. Se dice que b *está entre a y c en el orden* si existen los pares aRb y bRc. Se dice que b *sigue a a* en el orden si existe el par aRb, pero no hay ningún elemento c entre a y b(es decir, no existen aRc ni cRb).

Dada una relación de orden R, se puede hacer un subconjunto de esta en el que solo se tengan los pares aRb, donde b sigue a a. La relación R_s que se obtiene es un subconjunto de un orden estricto, por lo que se puede utilizar para obtener las propiedades de R. El diagrama de Hasse es la representación gráfica de este subconjunto de $R_s \subset R$.

Ejemplo 2.25.

Dado el conjunto A={1, 2, 3, 4, 5}, tenemos una relación binaria, que ya hemos visto anteriormente que es de orden, sobre A, definida como

$$R = \{ (a,b) \, / \, a,b \in A \text{ y } a \leq b\}$$

conteniendo los siguientes pares

$$R = \leq = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4),(5,5),(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

De esta obtenemos el subconjunto:

$$R_s = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,5), (4,5)\}$$

- Los pares de la relación identidad no cumplen la definición para pertenecer a R_s
- (1,3) no está pues existe (1,2) y (2,3)
- (1,5) no está pues existe (1,2) y (2,5)

Y su diagrama de Hasse

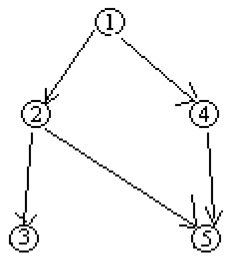


Figura 2.14. diagrama de Hasse de R_s sobre A

En este diagrama es fácil identificar el elemento maximal (el 1) y los elementos minimales (3 y 5), así como su orden parcial.

--

Ejemplo 2.26.

Dada la relación de orden total

$$R = \leq = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

Obtener el diagrama de Hasse

$$R_s = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$$

(1,3) no está pues existe (1,2) y (2,3)

(1,4) no está pues existe (1,2) y (2,4)

(1,5) no está pues existe (1,2) y (2,5)

(2,4) no esté pues existe (2,3) y (3,4)

(2,5) no está pues existe (2,4) y (4,5)

(3,5) no está pues existe (3,4) y (4,5)

Así el diagrama de Hasse es :

Figura 2.15. Diagrama de Hasse del orden total sobre A

Que corresponde con nuestra noción intuitiva de "ser menor o igual que"

--

2.8. APLICACIONES (FUNCIONES) ENTRE CONJUNTOS

Dada **una correspondencia de A en B (relación entre A y B),** esta **será una aplicación (una función)** de A en B **si cada elemento del conjunto inicial (espacio del dominio) tiene en el conjunto imagen (rango) uno y solo un** elemento. En este caso, a cada elemento del conjunto origen se le llama **preimagen** y a cada elemento del rango se le llama **imagen**. Se suele decir que cada elemento del conjunto origen (preimagen) tiene *una y solo una imagen*. Varias preimágenes pueden tener la misma imagen.

Una consecuencia de esta definición es que el espacio del dominio y el dominio son el mismo, por lo que se utilizan como sinónimos.

Dados los diagramas de la figura 2.16, en el de la derecha, la correspondencia inversa, no es necesariamente una aplicación (el elemento a tiene dos imágenes). Si, como ocurre en este caso, **la relación inversa no es una función** (aplicación), ***se dice que la función*** *(aplicación)* ***no tiene función*** *(aplicación)* ***inversa.***

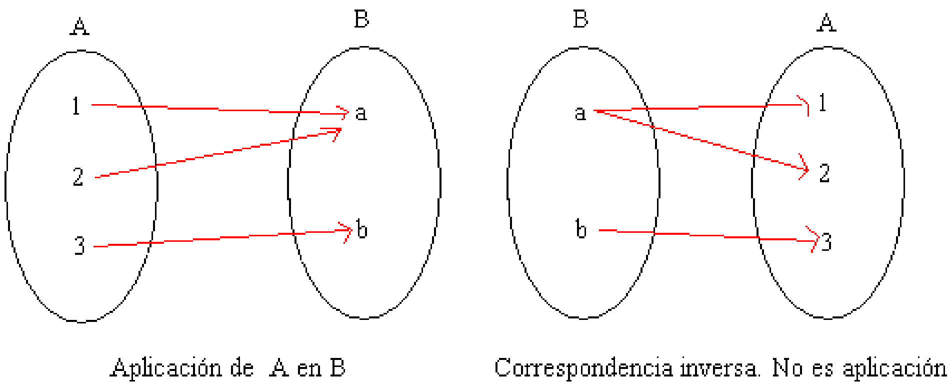


Figura 2.16. Diagramas de Venn con aplicación y su relación inversa

Una aplicación sobre una relación binaria es lo que conocemos como **función con un argumento.** Si $a \in A$ y $b \in B$, y f una función de un argumento se puede denotar por $(a,b) \in f$, $f(a) = b$ o $f{:}A \rightarrow B$. Si el nombre de la función es conocida, entonces podremos encontrarnos con la notación $f\ a$ (las funciones trigonométricas, por ejemplo: sen a).

Al igual de las relaciones n-arias, de manera general, una función de n argumentos es una aplicación, donde el conjunto inicial (espacio del dominio) está formado por el producto cartesiano de los A_n conjuntos de argumentos, donde **todas** y cada una de **las n-tuplas** $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, que son las preimágenes, **tienen una y solo una imagen** (varias preimágenes pueden tener la misma imagen). Si B es el espacio del rango, formalmente (observar que se ha definido como una relación binaria), una función f de n variables es una relación (n+1)-aria que se puede denotar por $(a_1,a_2,a_3,\ldots, a_n, b) \in f$, como $f(a_1,a_2,a_3,\ldots, a_n) = b$ o como $f{:}\ A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n \rightarrow B$.

Ejemplo 2.27

Sean los conjuntos $A_1=\{1,2,3\}$ y $A_2=\{4,6,8\}$ y $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ y sea la relación binaria, (se invita al lector a obtener la relación ternaria origen de R, $S \subset A_1 \times A_2 \times B$):

$R: A_1 \times A_2 \leftrightarrow B$ = {[(1,4),5], [(2,4),6], [(3,4),7], [(1,6),7], [(2,6),8], [(3,6),9], [(1,8),9], [(2,8),10],[(3,8),11]}

Se puede afirmar que es la función suma de los elementos de A_1 y A_2: cada preimagen (elemento de $A_1 \times A_2$) tiene una imagen y solo una.

--

Sea R una relación binaria entre A y B que no es una aplicación (función), pero se da la circunstancia de que para el dominio de la misma sí es una función y los elementos del conjunto resultante de la diferencia entre el espacio del dominio y el dominio no aparecen en ningún par de la relación (restricción vacía de A). En este caso R es una **función parcial,** donde se dice que la función no está definida para algunos elementos del espacio del dominio. La función parcial se denotará como

$$R: A \nrightarrow B$$

Ejemplo 2.28

Sean los conjuntos A ={1, 2, 3} y B = {a, b} y la relación R = {(1,a),(2,a)} sobre estos dos conjuntos. R es una función parcial, ya que la restricción de A al dominio de la relación, es vacía, y además es una función.

--

Para representar las funciones podremos utilizar cualquiera de los métodos utilizados para las relaciones.

2.8.1. Operaciones con funciones. Composición

Con las funciones se podrán realizar las mismas operaciones que con las relaciones, aunque la composición de funciones tiene restricciones.

Supongamos los conjuntos A, B, C, donde $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$ y las funciones $f:A \rightarrow B$ y $g:B \rightarrow C$. Dados los pares (a,b) y (b',c), la función f compuesta con g (denotado g o f, observar que es al revés que en las relaciones que no son funciones) es una función cuyos pares son de la forma (a,c), esto es, primer elemento perteneciente al conjunto origen de R y el segundo elemento perteneciente al conjunto imagen de S, si y solo si b = b'. *Para que una composición de funciones siga siendo una función, el rango de f debe ser igual al dominio de g.* Si no se cumple esta propiedad, lo que se obtiene es una relación fruto de la composición de otras dos relaciones (aunque sean funciones). Dado que f(a)=b, g(b)=c, podremos denotar la composición de funciones como g(f(a)) y de aquí que la notación con el operador '*o*' sea con los operandos invertidos, es decir

$$g \circ f = g(f(a))$$

2.8.2. Aplicación (función) suprayectiva

Son aplicaciones suprayectivas, sobreyectivas, epiyectivas o exhaustivas, aquellas en las que cada elemento del conjunto final (espacio del rango) recibe una o mas flechas. O lo que es lo mismo, todos los elementos del espacio del rango aparecerán en el segundo elemento del par una o más veces.

La figura 2.16 izquierda es suprayectiva, pues todos los elementos de conjunto final tienen una o más flechas. Esto ocurrirá siempre que $|A| \geq |B|$.

Una aplicación suprayectiva, por definición, no podrá tener aplicación inversa.

2.8.3. Aplicación (función) inyectiva

Son aplicaciones inyectivas, aquellas en las que cada elemento del conjunto final (espacio del rango) recibe como máximo una flecha (una o ninguna). O lo que es lo mismo, todos los elementos del espacio del rango aparecerán en el segundo elemento del par una o ninguna veces. Esto ocurrirá siempre que $|A| \leq |B|$. Así podemos tener la siguiente aplicación. Una función inyectiva no podrá tener función inversa, aunque sí una función parcial inversa.

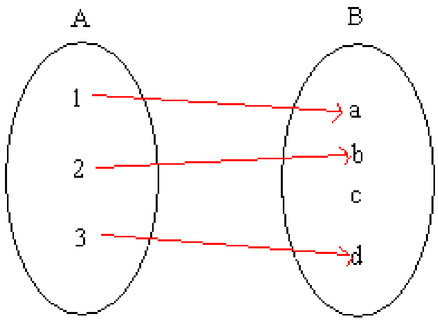


Figura 2.17. Diagrama de Venn para aplicación inyectiva

2.8.4. Aplicación biyectiva

Son aplicaciones biyectivas, aquellas en las que se da la circunstancia de que son suprayectivas e inyectivas a la vez; esto es, para cada elemento del conjunto inicial (espacio del dominio) le corresponde un elemento, y solo uno, del conjunto final (espacio del rango) y cada elemento del conjunto final recibe una y solo una flecha. O lo que es lo mismo, todos los elementos del espacio del rango aparecerán en el segundo elemento del par una y solo una vez. Esto ocurre cuando |A| = |B|. Estas funciones tendrán función inversa.

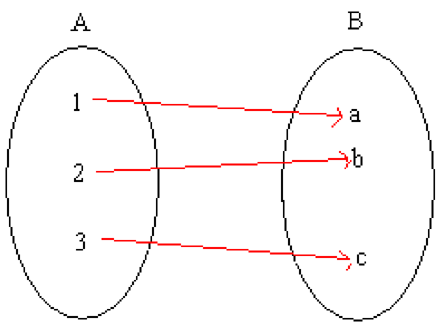


Figura 2.18. Diagrama de Venn para aplicación biyectiva

2.9. CONJUNTOS INFINITOS

Recordemos que podemos definir un conjunto finito (cardinalidad finita) por compresión y en extensión o lista. Para un conjunto con un número infinito de elementos también son válidas estas dos formas de definición. Sin embargo, en extensión ¿cómo poner todos los elementos si su número es infinito? Lo que se hace es poner unos cuantos elementos del conjunto seguidos de puntos suspensivos. Por ejemplo el conjunto ℕ de los números Naturales lo podemos definir en extensión con puntos suspensivos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4\ldots..\}$$

Hasta ahora se ha considerado que los conjuntos tienen un número finito de elementos. Supongamos un conjunto A finito de cardinalidad |A|; en este conjunto podemos contar cuantos elementos hay: un primero, un segundo, un tercero… hasta un número concreto n=|A|. De esta forma **hemos definido una aplicación biyectiva entre el conjunto** considerado **y el orden entre 1 y n** dentro del conjunto (ojo esto no significa que el conjunto esté ordenado, sino que estamos fijando una relación con un conjunto numérico para darle un orden a sus elementos). Es decir, se pueden contar los elementos de cualquier conjunto finito; en este caso se dice que **el conjunto es contable o enumerable**. Pero ¿son contables los conjuntos infinitos?

Utilizando el argumento anterior, podemos decir que ℕ**, aunque sea infinito, es contable**, ya que podemos afirmar que hay un primero, un segundo, un tercero…… Partiendo de esta afirmación, podemos decir que un **conjunto infinito X es contable** si se puede establecer una **aplicación biyectiva de X a ℕ.**

Ejemplo 2.29

Sea el conjunto X de todas las cadenas de zetas (los subíndices son para representar el número de zetas):

$$X = \{z_1, z_1z_2, z_1z_2z_3, z_1z_2z_3z_4, \ldots.., z_1z_2z_3z_4\ldots..z_n \text{ tal que } n \in \mathbb{N}\}$$

Podemos demostrar que existe una aplicación biyectiva de X en ℕ, de manera que el conjunto de todas las cadenas de zetas será infinito contable (cadena de 1 zeta, cadena de 2 zetas, cadena de 3 zetas…., cadena de n zetas).

--

Decimos que un conjunto es **simplemente infinito, o no contable** si **no** se puede establecer una **aplicación biyectiva** de X a ℕ.

Consideremos un conjunto infinito contable A, que es un subconjunto propio de X (universal). Dado que por definición hay una aplicación biyectiva entre A y $\mathbb{N}$, sobre X será imposible encontrar una relación entre X y $\mathbb{N}$ que sea una aplicación biyectiva, por lo que podemos afirmar que X es un conjunto infinito no contable. Es decir, dado un conjunto infinito contable, cualquier superconjunto de este no será contable.

Ejemplo 2.30

Sea X infinito contable *¿Es el conjunto potencia de X también infinito contable?*

Por la última afirmación sabemos que no: tendremos un número infinito contable de subconjuntos infinitos contables, lo que es una aplicación de X sobre $\mathbb{N}$, pero no biyectiva. A cada elemento del conjunto imagen (conjunto de subconjuntos), le llegarán un número infinito contable de subconjuntos del conjunto origen.

Para entenderlo más claramente, tomemos un caso particular: Definamos el conjunto X de las cadenas formadas por 0 y 1 (una cadena es una secuencia finita o infinita de elementos, en este caso ceros y unos), el cual será un conjunto infinito aunque contable; definido en extensión

X= {0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001,…..}

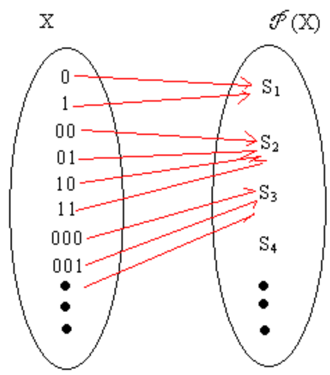


Figura 2.19. Aplicación de $\mathbb{N}$ sobre el conjunto potencia

Ahora demostremos que $\mathcal{P}$ (X) no es contable. Denotemos S_i como el conjunto de subconjuntos de cardinalidad i. Como vemos en el diagrama, por cada subconjunto de cardinalidad i tenemos varios elementos de X, por lo tanto no es una aplicación biyectiva.

--

Dado que un conjunto infinito contable es una aplicación biyectiva sobre $\mathbb{N}$, podemos demostrar que cualquier operación entre conjuntos infinitos contables es otro conjunto infinito contable.

Dado que un conjunto finito (contable) es un subconjunto de los conjuntos infinitos contables, y las operaciones entre conjuntos dan como resultado otro conjunto, podemos generalizar, para los segundos, las operaciones y propiedades definidas para los primeros, excepto el concepto de cardinalidad que cambia, no siendo ya un número concreto, y el conjunto potencia de un conjunto infinito contable, que hemos visto que era, simplemente, infinito.

2.10. SECUENCIAS INFINITAS. SUCESIONES Y CADENAS

Recordemos que una secuencia es una colección (finita o infinita) de objetos dados en un orden y que anteriormente nos hemos centrado en las secuencias finitas, las tuplas. En estas el orden venía dado por el del producto cartesiano.

Una secuencia infinita se denotará como las tuplas, con la salvedad de que continuará con puntos suspensivos:

$$(2,4,7,1,2,\ldots\ldots)$$

Al igual que las tuplas, una secuencia vacía es aquella que no tiene elementos. Se denota por λ o por ε o por ( ).

El orden en estas secuencias viene dado por la aplicación biyectiva de cada elemento de la misma con $\mathbb{N}$, de forma que el primer elemento le corresponde el 1, el segundo elemento le corresponde el 2….., es decir cada secuencia tiene un número contable de elementos.

Vendrá definida por la siguiente función (que no es biyectiva, ya que en la secuencia puede haber elementos de A repetidos, siendo estos significativos en la misma):

$$S: \mathbb{N} \rightarrow A$$

Las secuencias toman sentido cuando se producen sobre un mismo conjunto, es decir, todos los elementos de la secuencia pertenecen al conjunto. Si este es finito, el conjunto de todas las secuencias posibles (al que pertenece la secuencia sobre ese conjunto) será infinito contable, y si el conjunto es infinito contable, el conjunto de todas las secuencias posibles será incontable. Así el conjunto de todas las secuencias posibles no vacías sobre un conjunto A son:

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4 \ldots..$$

y el conjunto de todas las secuencias posibles, incluida la vacía sobre ese mismo conjunto A será:

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4 \ldots..$$

Donde A^i es el producto cartesiano del conjunto i veces.

Ejemplo 2.31.

El conjunto X del ejemplo anterior es un ejemplo de A+, donde A = {0,1}, X= A+. Con la secuencia vacía:

$$A^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots..\}$$

--

Cuando la secuencia es **sobre un conjunto numérico**, entonces se llama **sucesión**[3].

---

[3] Existen algunos autores que utilizan sucesión como sinónimo de secuencia.

Cuando una secuencia (finita o infinita) es sobre un **conjunto de símbolos** (por ejemplo caracteres), se la llama **cadena**. El conjunto de símbolos sobre el que se forma la cadena se denomina **alfabeto**, que es **finito**. Dado que el conjunto de cadenas posibles es contable, podemos establecer una relación de orden, llamado **orden lexicográfico**, que podemos utilizar para saber fácilmente si una cadena es posterior a otra en ese orden. Dadas dos cadenas c_1 y c_2:

- Si el primer carácter de la primera cadena es menor que el primer carácter de la segunda. Entonces $c_1 < c_2$
- Si el primer carácter de la primera y la segunda son iguales, ir hasta el elemento de la cadena en que las dos sean diferentes:
    - Si este es menor en la primera cadena que en la segunda entonces $c_1 < c_2$.
    - Si la primera cadena se termina antes que la segunda sin encontrar diferencias, entonces $c_1 < c_2$

Una operación propia de las cadenas finitas es la concatenación. Dadas dos cadenas X e Y, la concatenación de las mismas, que se denota por $X^\frown Y$ o simplemente por XY, es una cadena formada por los elementos de X seguidos de los elementos de Y. Esta operación no es conmutativa, aunque sí asociativa.

CAPÍTULO 3.- COMBINATORIA

3.1. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Retomemos las relaciones del capítulo anterior entre dos conjuntos. Ahora lo que **queremos averiguar** es **el número de aplicaciones (funciones) que podemos tener entre** estos **dos conjuntos**.

Ejemplo 3.1.

Dados los conjuntos A = {1,2,3} y B= {a,b}, una posible aplicación entre estos podría ser el conjunto {(1,a) (2,a) (3,b)}.

--

Esta representación en pares la podemos reducir a una secuencia finita: si suponemos que el conjunto origen (espacio de dominio) va a ser siempre una serie de números consecutivos naturales ordenados (este orden lo damos nosotros, pues sabemos que un conjunto no tiene orden entre sus elementos), podemos representar el conjunto anterior como la tupla

$$\{(1,a)\ (2,a)\ (3,b)\} \equiv (a,a,b)$$

Ya que el orden natural de los elementos del conjunto origen (espacio dominio) establece, de manera implícita, la imagen (elemento del rango) que le corresponde a cada uno de estos elementos.

Como se puede observar, se van a formar tuplas de tres elementos (uno por cada elemento de A). El conjunto de todas esas tuplas son las posibles *variantes* de funciones desde el conjunto A. En términos formales, cada tupla es una *variación con repetición* de m elementos tomados de n en n. Se dice con repetición porque los m elemento pueden estar repetidos en varias posiciones de la tupla.

Ejemplo 3.2.

Siguiendo con el ejemplo 3.1., las distintas variantes de funciones desde A hacia B son (luego se describirá un método con el diagrama de árbol que se explica más abajo):

(a,a,a) (a,a,b) (a,b,a) (a,b,b) (b,a,a), (b,a,b) (b,b,a) (b,b,b)

Que son todas la variaciones con repetición de los elementos de B, tomados de 3 en tres.

--

3.1.1. Calculo de las variaciones con repetición

- En el primer elemento de la tupla podremos tener cualquiera de los elementos del conjunto final (espacio de rango).

- En el segundo elemento podemos tener todos los elementos del conjunto final (espacio de rango).

- En la tercera igual;

- En el elemento n de la tupla podremos tener cualquier de los elementos del conjunto final (espacio de rango).

Así, el resultado resulta ser exponencial. Si el conjunto final (espacio del rango) tiene m elementos, y el dominio tiene n elementos, obtendremos las variaciones con repetición de m elementos, tomados de n en n, siendo su número

$$VR(m,n) = m^n$$

Siguiendo con el ejemplo del principio, el número de variaciones con repetición serán:

Ejemplo 3.3.

Las variaciones con repetición del ejemplo 3.2 serán:

(2 elementos de la primera posición) x (2elementos de la segunda) x (2 elementos de la tercera)= 2^3= 8 tuplas posibles

--

3.1.2. Diagrama de árbol para variaciones con repetición

Para representar gráficamente, y así tener una visión del número de variaciones, se puede utilizar el diagrama de árbol. Dado el conjunto final (espacio del rango), con n elementos y para k-tuplas (n elementos tomados de k en k), la forma de encontrar el número total de tuplas (el número total de aplicaciones posibles), es:

1.- Dibujamos un punto a la izquierda del diagrama

2.- Desde este punto, y para cada uno de los n elementos del conjunto, sale un arco. Esto es lo que se llaman arcos de primera generación. Etiquetamos cada extremo con cada uno de los elementos.

3.- Para cada una de esos arcos de primera generación, saldrá también un arco por cada uno de los n elementos del conjunto, con los que se etiquetarán. Estos arcos se llaman de segunda generación.

…

4.- Para cada uno de los arcos de k-1 generación, sale un arco por cada elemento del conjunto. A estos arcos se las llama de k-generación.

El número de arcos de k-generación será el número total de aplicaciones posibles de estos n elementos tomados de k en k, con repetición.

Ejemplo 3.4.

Así, para el ejemplo anterior en el que m =2 (a y b) y n=3 (3-tupla), el diagrama de árbol sería:

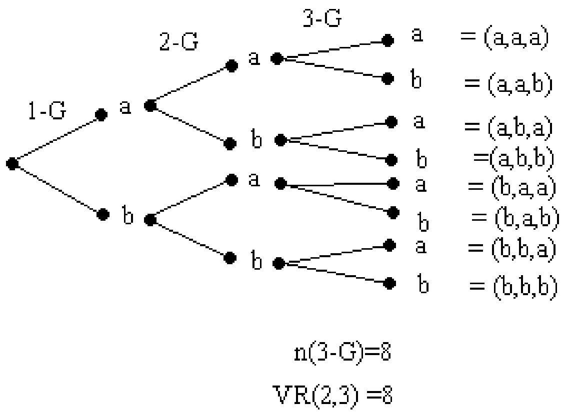


Figura 3.1. Diagrama de árbol para variaciones con repetición del ejemplo seguido

--

3.1.3. Relación con el producto cartesiano

Podemos observar que no hay diferencia entre el diagrama de árbol descrito para el producto cartesiano que el descrito para las variaciones. De hecho, las variaciones son un caso particular del producto cartesiano sobre un mismo conjunto k veces (tomados de k en k) de forma que el número de variaciones con repetición también se pueden calcular por el principio del producto.

3.2. VARIACIONES SIN REPETICION

Ahora lo que queremos calcular son el número de aplicaciones *inyectivas* entre dos conjuntos (esto es, aquellas en las que el conjunto final –espacio de rango- solo puede recibir a lo sumo una flecha o ninguna). De aquí se deduce que el conjunto inicial (espacio de rango) tiene los mismos o menos elementos que el final (espacio de dominio).

$$|A| \leq |B|$$

A partir de la definición de "inyectiva" deducimos que **cada elemento sólo puede aparecer en la tupla, una o ninguna vez** (de ahí que sean sin repetición).

Ejemplo 3.5.

Sean dos conjuntos A= {1,2,3} y B = {a,b,c,d}, un ejemplo de aplicación inyectiva sería el conjunto {(1,a) (2,c) (3,d)}. Aquí también vamos a considerar implícito el conjunto origen (dominio), con lo que nos quedaría la tupla (a,c,d) que representa a una de las posibles aplicaciones inyectivas para esos dos conjuntos.

Las aplicaciones inyectivas posibles para estos dos conjuntos son las siguientes tuplas:

(a,b,c) (a,b,d) (a,c,d) (a,d,c) (b,a,c) (b,a,d) (b,c,d)(b,d,a) (b,d,c)

--

Formalmente, se dice que cada una de esas tuplas es una *variación sin repetición* de m elementos (a, b, c, d) tomados de de n en n (de tres en tres), de manera que un elemento sólo puede aparecer una o ninguna vez en la tupla. Cada una de estas, a su vez, es distinta si alguna de las posiciones tiene elementos distintos o bien lo es el orden en que están (lo que es obvio por la definición de tupla).

3.2.1. Diagrama de árbol para variaciones sin repetición

Dado un conjunto final (espacio de rango), con n elementos y para k-tuplas, se realiza de la siguiente forma:

1.- Dibujamos un punto a la izquierda del diagrama.

2.- Para cada uno de los elementos del conjunto trazamos un arco. En este caso serán tantos arcos como elementos posibles en el conjunto. Esto es lo que se llaman arcos de primera generación.

3.- Etiquetamos cada arco con cada uno de los elementos.

4.- Desde cada arco de primera generación, trazamos tantos arcos como elementos del conjunto excepto el de la etiqueta del arco de primera generación del que proceda.

5.- Tendremos m-1 elementos posibles (excluido del que proceden) que etiquetan m-1 arcos de segunda generación.

…..

6.- Desde cada arco de k-1 generación, trazamos tantos arcos como elementos resulte de eliminar del conjunto los elementos que etiquetan de los arcos precedentes (recorriéndolos hacia atrás). Si hemos considerado ya los k-1 elementos como presentes, estos no pueden ser etiquetas de líneas de k generación.

7.-Tendremos m-k+1 elementos posibles, que etiquetarán m-k+1 arcos de k generación.

El número total de arcos de k-generación será el número total de aplicaciones inyectivas posibles de estos m elementos tomados de k en k, sin repetición.

Ejemplo 3.6.

Dados los conjuntos del ejemplo 3.5. obtener las variaciones sin repetición mediante el diagrama de árbol descrito.

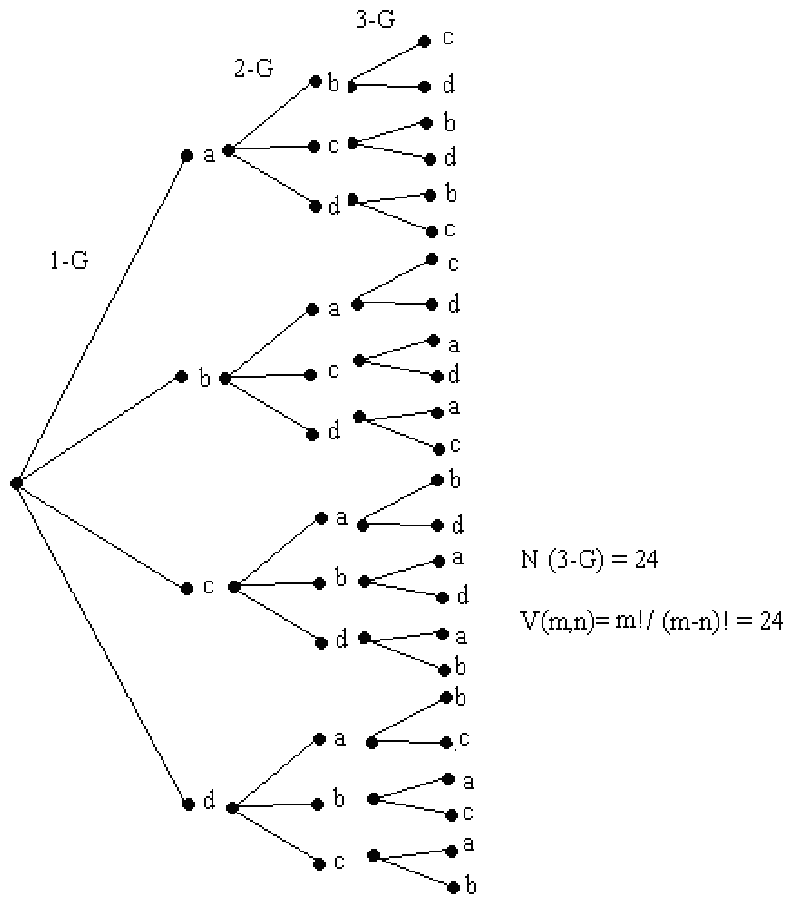


Figura 3.2. Diagrama de árbol para variaciones sin repetición

3.2.2. Factorial de un número

Para calcular las variaciones sin repetición, recordemos lo que es el factorial de un número. Dado un número natural m, el factorial de m, denotado por m!, se define por el producto de m por cada uno de los número naturales consecutivamente desde m-1 hasta 1 (los que le preceden)

$$m! = m(m-1)!=m(m-1)(m-2)!= m(m-1)(m-2)\ldots..3.2.1$$

Caso particular es el factorial de cero

$$0! = 1$$

3.2.3. Cálculo de las variaciones sin repetición

Del diagrama de árbol, podemos obtener que el número de variaciones sin repetición será el número de arcos de primera generación, por el número de arcos de segunda generación y así hasta el número de arcos de k-ésima generación.

$$V(m,k) = m\,(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)$$

Este cálculo puede ser muy tedioso, así que lo vamos a multiplicar y a dividir por (m-k)!. La ecuación nos queda

$$V(m,k) = m\,(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)\,(m-k)!\,/\,(m-k)!$$

De esta forma podemos sustituir el numerador por el factorial de m y así la ecuación finalmente queda

$$V(m,k) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Se tiene que cumplir la condición de que $m \geq k$, ya que no existe el factorial de un número negativo (esto es inmediato por la definición de aplicación inyectiva).

Ejemplo 3.7.

El número de variaciones sin repetición del ejemplo 3.6 será, si m es 4 y k es 3:

$$V(m,k) = 4!\,/\,(4-3)! = 24$$

--

3.3. PERMUTACIONES

Ahora lo que se pretende es calcular es el número de aplicaciones biyectivas. Como ya hemos dicho, estas son suprayectivas e inyectivas a la vez, y se caracterizan porque el conjunto origen y el conjunto imagen tienen el mismo número de elementos (esto es obvio ya que los elementos del conjunto imagen sólo pueden tener una y solo una flecha).

Sea un conjunto A={1,2,3…n}, de números naturales. Si se hace una aplicación biyectiva de A sobre A, lo que estamos hallando es *una de las posibles ordenaciones de los n elementos de A.* El número de permutaciones se denota por P(n), y son el número de ordenaciones posibles de n elementos.

Ejemplo 3.8.

Dado el conjunto C={1,2,3}, una de las aplicaciones biyectivas de C sobre C sería el conjunto de pares {(1,3) (2,2) (3,1)}. Como en casos anteriores, vamos a considerar implícito el conjunto origen (al ser una aplicación biyectiva de A sobre A, el conjunto origen es implícito), con lo que nos quedaría la tupla (3, 2, 1). El total de las aplicaciones biyectivas de A sobre A serían:

(1,2,3)(1,3,2) (2,1,3) (2,3,1) (3,2,1) (3,1,2)

--

Observando el resultado, vemos que ningún elemento se repite en cada tupla y que además, cada una de ellas tiene todos los elementos, diferenciándose entre ellas por el orden de sus elementos. Como ya se dijo, las aplicaciones biyectivas son un caso particular de las inyectivas, así **una permutación es un caso particular de las variaciones sin repetición.**

3.3.1. Cálculo de las permutaciones

Para calcular las permutaciones, vemos que son m elementos (1,2,3) tomados de m en m (de tres en tres), así aplicando la ecuación de las variaciones sin repetición

V(m,m) = P(m)= m! / (m-m)! el denominador es 0 y su factorial 1, luego

$$P(m) = m!$$

Para obtener todas las tuplas posibles se realizará mediante el mismo diagrama de árbol descrito para las variaciones sin repetición.

2.4. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

Para entender estas permutaciones, primero pondremos un ejemplo; supongamos un conjunto de 4 personas, formado por 2 mujeres y 2 hombres

Si ponemos estas personas en fila, ¿Cuántas posibles ordenaciones posibles tendríamos de las 4 personas? En este caso vamos a definir cada persona como un elemento distinto, así queda el conjunto Personas={m1,m2,h1,h2}.

Calculamos las permutaciones sin repetición

$$P(4) = 4! = 24 \text{ permutaciones distintas}$$

Si hacemos el diagrama de árbol para permutaciones sin repetición, obtenemos las siguientes 24 cuádruplas (cuatro personas distintas en fila):

(m1,m2,h1,h2) (m1,m2,h2,h1) (m1,h1,m2,h2) (m1,h1,h2,m2) (m1,h2,m2,h1)
(m1,h2,h1,m2) (m2,m1,h1,h2) (m2,m1,h2,h1) (m2,h1,m1,h2) (m2,h1,h2,m1)
(m2 h2,m1,h1) (m2,h2,h1,m1) (h1,m1,m2,h2) (h1,m1,h2,m2) (h1,m2,m1,h2)
(h1,m2,h2,m1) (h1,h2,m1,m2) (h1,h2,m2,m1) (h2,m1,m2,h1) (h2,m1,h1,m2)
(h2,m2,m1,h1) (h2,m2,h1,m1) (h2,h1,m1,m2) (h2,h1,m2,m1)

Ahora nos hacemos la siguiente pregunta ¿Cuantas posibles ordenaciones tendríamos de hombres y mujeres en la fila?

Para llegar a la solución, lo que hacemos es determinar ***clases de elementos*** del mismo tipo: en nuestro ejemplo hombres y mujeres.

La clase hombres tiene dos elementos, y el número de permutaciones posibles de estos dos elementos es de 2! = 2, que son las duplas (h1, h2) (h2, h1). En el caso de las mujeres las permutaciones posibles de sus dos elementos es también 2 y sus duplas son (m1, m2) (m2,m1).

Lo importante aquí son las clases de elementos. En cada una de ellas, sus elementos no se pueden distinguir los unos de los otros (un hombre no se distingue de otro). En las tuplas, esto se consigue por la eliminación de los subíndices, lo que resulta en tuplas iguales: (h,h) para hombres y (m,m) para mujeres.

Para identificarlas vamos a tomar primero la clase hombres:

- Tomemos la primera permutación (m1,m2,h1,h2).

- Los hombres están en las posiciones finales y las mujeres en las iniciales. Si sólo tenemos en cuenta la clase hombres, la forma de la tupla será (m1,m2,h,h).

- Si revisamos las tuplas, y las comparamos con la anterior, resulta que, si eliminamos los subíndices de los hombres. (m1,m2,h1,h2) será igual que (m1,m2,h2,h1)

- Si cogemos la siguiente tupla (m1,h1,m2,h2), y se convierte en (m1,h,m2,h), también tenemos dos tuplas iguales (m2,h1,m1,h2) y (m2,h2,m1,h2) si eliminamos los subíndices de los hombres.

- Procedemos así hasta que no queden grupos de tuplas.

El resultado es el siguiente (tachamos las iguales)

(m1,m2,h,h) ~~(m1,m2,h,h)~~ (m1,h,m2,h) (m1,h,h,m2) ~~(m1,h,m2,h)~~ ~~(m1,h,h,m2)~~
(m2,m1,h,h) ~~(m2,m1,h,h)~~ (m2,h,m1,h) (m2,h,h,m1) ~~(m2 h,m1,h)~~ ~~(m2,h,h,m1)~~
(h,m1,m2,h) (h,m1,h,m2) (h,m2,m1,h) (h,m2,h,m1) (h,h,m1,m2) (h,h,m2,m1)
~~(h,m1,m2,h)~~ ~~(h,m1,h,m2)~~ ~~(h,m2,m1,h)~~ ~~(h,m2,h,m1)~~ ~~(h,h,m1,m2)~~ ~~(h,h,m2,m1)~~

Sobre este conjunto de tuplas resultante, aplicamos el mismo procedimiento ahora a las mujeres: tomamos la primera permutación, (m1,m2,h,h) y le eliminamos los subíndices, resulta que la tupla (m2,m1,h,h) es igual a la anterior. Procedemos así hasta que no queden grupos de tuplas.

El resultado es el siguiente (tachamos las iguales):

(m,m,h,h) (m,h,m,h) (m,h,h,m) ~~(m,m,h,h)~~ ~~(m,h,m,h)~~ ~~(m,h,h,m~~) (h,m,m,h) (h,m,h,m) (~~h,m,m,h~~) (~~h,m,h,m~~) (h,h,m,m)~~ (h,h,m,m)~~

Eliminando las tuplas repetidas, nos queda el conjunto:

(m,m,h,h) (m,h,m,h) (m,h,h,m) (h,m,m,h) (h,m,h,m) (h,m,m,h)

Ejemplo 3.9.

Supongamos ahora que tenemos una fila con 5 personas de las cuales son 3 mujeres y 2 hombres. El número de permutaciones (ordenaciones) de las 5 personas será de 5! = 120 quíntuplas. Si cogemos los elementos de la clase mujeres, resulta que tendremos 3!=6 permutaciones:

(m1,m2,m3) (m1,m3,m2) (m2,m1,m3) (m2,m3,m1) (m3,m1,m2) (m3,m2,m1)

Ahora cogemos una quíntupla, por ejemplo (**m1,m2**,h1,**m3**,h2), le quitamos los subíndices a las mujeres y buscamos todas las que son de la forma (m,m,h1,m,h2). Efectivamente, son seis que corresponden a las seis ternas de la clase mujeres:

(**m1,m2**,h1,**m3**,h2) (**m1,m3**,h1,**m2**,h2) (**m2,m1**,h1,**m3**,h2)
(**m2,m3**,h1,**m1**,h2) (**m3,m1**,h1,**m2**,h2) (**m3,m2**,h1, **m1**,h2)

Si eliminamos los subíndices de las mujeres, resultará que estas 6 quíntuplas son iguales. Si continuamos con todas las tuplas, cada 6 quíntuplas originales, se produce una permutación con repetición de elementos de la clase mujeres.

De la misma forma, lo haríamos con los hombres. Si cogemos los elementos de la clase hombres, resulta que tenemos 2! = 2 tuplas distintas (h1,h2) (h2,h1)

Ahora cogemos una quíntupla, por ejemplo (m1,m2,**h1**,m3,**h2**), le quitamos los subíndices a los hombres y buscamos todas las que son de la forma (m1,m2,h,m3,h). Efectivamente son dos, que corresponden a los dos pares de la clase hombres:

(m1,m2,**h1**,m3,**h2**) (m1,m2,**h2**,m3,**h1**)

Si eliminamos los subíndices de los hombres, resultará que estas dos quíntuplas son iguales. Si continuamos con todas las quíntuplas, cada 2 originales, se produce una permutación con repetición de elementos de la clase hombres.

Si eliminamos todos los subíndices a cada grupo de permutaciones, resulta que tenemos 10 permutaciones con repetición de 5 elementos con grupos de 3 y 2:

(m,m,h,m,h) (m,m,m,h,h) (m,h,m,m,h) (h,m,m,m,h) (h,m,m,h,m)
(h,m,h,m,m) (h,h,m,m,m) (m,m,h,h,m) (m,h,h,m,m) (m,m,m,h,h)

--

De manera general, este proceso se realiza para cada una de las clases de elementos que se puedan tener en el conjunto original.

Para un número de elementos grande, utilizar este método para calcular el número de permutaciones resultantes puede ser un trabajo tedioso. Sin embargo nos ofrece una idea intuitiva para calcularlas de manera analítica. Se puede afirmar que el número de permutaciones con repetición (permutaciones con clases de elementos) es el número de permutaciones sin repetición, tomando todos los elementos distintos, dividido por el número de permutaciones sin repetición de cada clase, donde sus elementos también se consideran distintos.

Formalmente

$$PR_n^{a,b,c\ldots} = \frac{P(n)}{P(a).P(b).P(c)\ldots} = \frac{n!}{a!\ b!\ c!}$$

Donde n es el número total de elementos y a, b, c el número de elementos que son de la misma categoría. Se tiene que cumplir que a+b+c+…= n

Ejemplo 3.10.

Como resultado del ejemplo de la fila de 2 hombres y 2 mujeres, se confirma que el número de permutaciones es 6 :

$$PR_4^{2,2} = \frac{P(4)}{P(2)\ P(2)} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$$

y como resultado del ejemplo de la fila de 3 mujeres y 2 hombres, se confirma que el número de permutaciones es 10:

$$PR_5^{3,2} = \frac{P(5)}{P(3)\ P(2)} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$$

Que coincide con el número de tuplas obtenidas anteriormente.

--

3.5. COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

Hasta ahora se han estado viendo aplicaciones (funciones) entre conjuntos y sus posibles resultados. Ahora lo que nos interesa es calcular el número de subconjuntos de un conjunto dado. Para ello vamos a necesitar el conjunto de las partes de un conjunto o conjunto potencia $\mathscr{P}$ (X) . Dado un conjunto A = {a,b,c}. Los subconjuntos posibles son:

- Subconjunto de cardinalidad 0.- Conjunto vacío

- Subconjuntos de cardinalidad 1.- {a}, {b},{c}

- Subconjuntos de cardinalidad 2.- {a,b},{a,c},{b,c}

- Subconjuntos de cardinalidad 3.- Conjunto A .- {a,b,c}

Si los contamos, resulta que $|\mathcal{P}(A)|= 8$, lo que coincide con

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}=2^3=8$$

Para las combinaciones, lo que nos interesan son los subconjuntos de cardinalidad i , con $0 < i < |A|$ (todos excepto el vacío y el propio conjunto). Así Para el conjunto A, que tiene cardinalidad 3, tiene 3 posibles combinaciones de dos elementos (n=2). Una combinación es cada uno de los elementos del conjunto de subconjuntos de A de cardinalidad 2.

Generalizando, dado un conjunto de cardinalidad m, queremos calcular el número subconjuntos de cardinalidad n, donde $m \geq n$. Es decir, calcular el número de combinaciones de los m elementos del conjunto tomados de n en n, Recordar que son subconjuntos por lo que no hay ningún orden:

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

3.5.1 Cálculo de combinaciones sin repetición

Supongamos el ejemplo anterior, en el que solo conocemos A={a,b,c}. Sabemos que el número combinaciones posibles de A, puestos de dos en dos (subconjuntos de cardinalidad 2) son {a,b},{a,c},{b,c}. Ahora queremos calcular de manera analítica el número de combinaciones.

Una primera aproximación podría ser calcular las variaciones de 3 elementos tomados de 2 en dos; el resultado de estas variaciones es:

(a,b) (a,c) (b,a) (b,c) (c,a) (c,b), $V(3,2) = 3! / (3-2)! = 6$

Recordar que las variaciones son tuplas (elementos ordenados) y las combinaciones no tienen orden. Vamos a considerar clases de pares, de manera que, si un par tiene los mismos elementos que un subconjunto de cardinalidad n, entonces esos pares pertenecen a la misma clase, y por lo tanto sus elementos al mismo subconjunto.

Para el subconjunto {a,b}, las tuplas (a,b) (b,a) serían de la misma clase
Para el subconjunto {a,c} las tuplas (a,c) (c,a) serían de la misma clase
Para el subconjunto {b,c} las tuplas (b,c) (c,b) serían de la misma clase

Pongamos otro ejemplo. Sea A={a,b,c,d} y queremos saber el número de subconjuntos de cardinalidad 3.

El número de variaciones será V(4,3)=4! /(4-3)! = 24

Las ternas (a,b,c) (a,c,b) (b,a,c) (b,c,a) (c,a,b) (c,b,a) son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto {a,b,c}
Las ternas (a,b,d) (a,d,b) (b,a,d) (b,d,a) (d,a,b) (d,b,a) son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto {a,b,d}
Las ternas (b,c,d) (b,d,c) (c,b,d) (c,d,b) (d,b,c) (d,c,b) son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto {b,c,d}
Las ternas (a,c,d) (a,d,c) (c,a,d) (c,d,a) (d,a,c) (d,c,a) son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto {a,c,d}

De donde sale que hay 4 subconjuntos de cardinalidad 3.

Se puede afirmar (se demuestra por inducción) que **todos los subconjuntos tienen el mismo número de posibles ordenaciones**, que corresponden al número permutaciones sin repetición de los n elementos (recordar que son subconjuntos de cardinalidad n).

En nuestros dos ejemplos, el número de permutaciones sin repetición de los elementos del subconjunto, en el primer caso son 2!=2 pares, y en el segundo ejemplo 3!=6 ternas.

Las n-tuplas con los mismos elementos se consideran iguales; se eliminan las que sobren, y esto es equivalente a **dividir las variaciones de los m elementos del conjunto tomadas de n en n** (subconjuntos de cardinalidad n para un conjunto de cardinalidad m) **por el número de permutaciones de los elementos del subconjunto**.

Así en nuestro ejemplos, en el primero son C(3,2)=3 subconjuntos y en el segundo C(4,3)=4 subconjuntos (que coincide con la cantidad obtenida anteriormente)

Formalmente, para un conjunto de m elementos, el conjunto de combinaciones de orden n (el número de subconjuntos con n elementos) será:

$$C(m,n) = \frac{V(m,n)}{n!}$$

Si hacemos la sustitución, nos queda finalmente

$$C(m,n) = \frac{\dfrac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \boxed{\frac{m!}{n!\,(m-n)!}}$$

El número de combinaciones se denota por C(m,n), o más comunmente por $\binom{m}{n}$, número combinatorio (notación de Euler) y se lee como el número de combinaciones de m elementos tomados de n en n.

Con esta ecuación hemos establecido la base para completar el cálculo del cardinal del conjunto potencia de uno dado, este último de cardinalidad finita (visto en el primer capítulo)

3.6. COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Este es un típico problema de clasificación. Pongamos un ejemplo: Tenemos un conjunto finito de personas, por ejemplo 10; si tenemos 3 filas distintas ¿de cuantas maneras distintas se pueden distribuir las filas? En la siguiente tabla se da la solución, donde F_1 es fila 1, F_2 es fila 2 y F_3 es fila 3

F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3	F_1	F_2	F_3
0	0	10	1	0	9	2	1	7	3	3	4	4	6	0	6	4	0
0	1	9	1	1	8	2	2	6	3	4	3	5	0	5	7	0	3
0	2	8	1	2	7	2	3	5	3	5	2	5	1	4	7	1	2
0	3	7	1	3	6	2	4	4	3	6	1	5	2	3	7	2	1
0	4	6	1	4	5	2	5	3	3	7	0	5	3	2	7	3	0
0	5	5	1	5	4	2	6	2	4	0	6	5	4	1	8	0	2
0	6	4	1	6	3	2	7	1	4	1	5	5	5	0	8	1	1
0	7	3	1	7	2	2	8	0	4	2	4	6	0	4	8	2	0
0	8	2	1	8	1	3	0	7	4	3	3	6	1	3	9	0	1
0	9	1	1	9	0	3	1	6	4	4	2	6	2	2	9	1	0
0	10	0	2	0	8	3	2	5	4	5	1	6	3	1	10	0	0

Sea un conjunto A finito y no vacío de n elementos $|A|=n$ (en nuestro ejemplo son las 3 filas). Sea k un número entero positivo (en nuestro caso el número de personas), donde $k \geq n$. Cada uno de los elementos del conjunto define una clase (3 categorías de filas); cada combinación con repetición estará compuesta por x_1 elementos de k para la categoría 1 (entre cero y k elementos), x_2 elementos de k para la categoría 2 (entre cero y k elementos),….x_n elementos de k para la categoría n (entre cero y k elementos), cumpliéndose que $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$

Como caso particular de las combinaciones con repetición, sería aquella en la que se distribuyen uniformemente los elementos en las filas, que es la calculada mediante el principio de la distribución de conjuntos.

3.6.1. Cálculo de las combinaciones con repetición

Dado que los elementos son iguales ¿Cómo identificamos los elementos en cada una de las n categorías de A? Lo que hacemos es construir una cadena de dígitos de la siguiente forma:

- Tantos 1,s como número de elementos x_1
  seguido de 0 como marca de categoría 1
- Tantos 1,s como números de elementos x_2
- seguido de 0 como marca de categoría 2
- ….
- Tantos 1,s como número de elementos x_n.
  (no hace falta marca de fin de categoría n; está implícita ya que es la última).

Así, en la cadena resultante, tendremos k unos más n-1 ceros (marca de primera, de segunda,…, de n-1 categoría). Una vez que hemos traducido a una cadena de 0,s y 1,s, el problema se reduce a encontrar el número de combinaciones sin repetición posibles de k+n-1 elementos tomados de k en k

En nuestro ejemplo, la traducción en una cadena de 0,s y 1,s para una posible combinación, Fila1=3 fila2=3 fila 3=4, resultaría en una cadena de k+n-1 elementos

111011101111

Luego, la ecuación para el cálculo de combinaciones con repetición quedaría

$$CR(n,k) = C(k+n-1,k) = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!\,[(k+n-1)-k]!} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Continuando con nuestro ejemplo, de 3 filas y 10 personas, resulta que los elementos de la tabla anterior son:

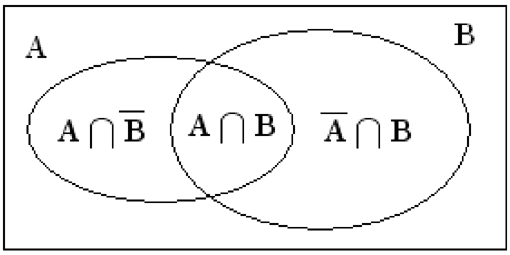
$$CR(3,10) = C(10+3-1,10) = \binom{10+3-1}{10} = \frac{12!}{10!\,(12-10)!} = 66$$

3.7. PRINCIPIO DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN (CONJUNTOS)

Para finalizar este capítulo, habiendo visto ya las combinaciones, ya podemos explicar este principio de la teoría de conjuntos. Este nos dice que, dados unos conjuntos, si somos capaces de saber los elementos que pertenecen a la intersección de estos conjuntos, entonces seremos capaces de determinar la cardinalidad de la unión de estos mismos (en el principio de adicción solo se ha contemplado si los conjuntos son disjuntos).

Primero vamos a definirlo para dos conjuntos; su ecuación es:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Si observamos el diagrama de Venn, la cardinalidad de la unión anterior se puede escribir como

$$|A \cup B| = |\overline{A} \cap \overline{B}| + |A \cap B| + |A \cap B|$$

también vemos que

$|A| = |A \cap \overline{B}| + |A \cap B|$; despejamos y nos queda $|A \cap \overline{B}| = |A| - |A \cap B|$

$|B| = |\overline{A} \cap B| + |A \cap B|$; despejamos y nos queda $|\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$

Si sustituimos el resultado de estas dos ecuaciones en la primera, nos queda

$$|A \cup B| = [|A| - |A \cap B|] + [|B| - |A \cap B|] + |A \cap B|$$

Donde, operando, obtenemos la **ecuación del principio de inclusión-exclusión**

Al ser el principio de la adición de conjuntos un caso particular del de inclusión-exclusión, podremos aplicar la ecuación de este último para conjuntos disjuntos.

Pero ¿qué ocurre si tenemos la unión de muchos conjuntos con elementos comunes todos ellos y entre ellos?

Sea n el número de conjuntos, donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos. Llamamos α_i a la suma de los cardinales de todas las intersecciones de i conjuntos distintos, tal que $1 \leq i \leq n$ (es decir, todas las combinaciones posibles de n conjuntos tomados de i en i)

$\alpha_1 = |A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|$

$\alpha_2 = |A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+\ldots+|A_{n-1} \cap A_n|$

$\alpha_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_3 \cap A_4|+\ldots+|A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$

....

$\alpha_n = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|$

Entonces se cumple que :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n$$

--

CAPÍTULO 4.- TEORÍA DE GRAFOS

4.1.- DEFINICIONES

Todas estas definiciones son para grafos finitos:

- **Vértice o nodo.**- Se representará por una circunferencia o un punto, que podrá estar etiquetado. Cuando estemos en teoría de grafos lo encontraremos como vértice y si estamos con técnicas de uso de grafos, normalmente se usará el término *nodo*.

- **Arista y arco.**- Si A y B son dos nodos distintos, hay dos opciones: arista no dirigida y arista dirigida:

  - Una arista (arco) no dirigida se define como un conjunto de dos nodos de la forma {A,B}. Su representación será con una línea que une los dos nodos. Se dice que dos nodos unidos por un arco son **adyacentes** y también que son los **extremos** del arco, el cual **incide** en ambos nodos.

  - Una arista (arco) dirigida se define como un par ordenado de la forma (A, B). Su representación será con una línea con dirección hacia el segundo nodo del par. Dado un **arco dirigido de A hacia B**, se dice que **A es adyacente a B**, pero B no es adyacente a A (salvo que haya otro arco dirigido de B hacia A). Al nodo del que sale el arco, A, se le llama **origen o inicial** y al nodo en el que incide, B, se le llama **fin o terminal**.

Uno nodo sobre el que no incide ninguna arista, se dice que es **aislado.**

- **Grado de un vértice (nodo).-** Si las aristas no son dirigidas es el número de de las mismas que *inciden* en el vértice (nodo). Si las aristas son dirigidas es el número de aristas que salen (grado positivo o de salida) más el número de aristas que entran (grado negativo o de entrada).

- **Grafo (no dirigido).-** conjunto finito de '***vértices'*** distintos unidos por '***aristas'***.

  Formalmente, un grafo es un par de la forma G=(N, A), donde

  - N es un *conjunto* finito *no vacío* de nodos.
  - A es un conjunto de aristas (vacío o no vacío), es decir, de conjuntos de dos elementos, que son los vértices que se unen.

- **Grafo dirigido o digrafo.**- Conjunto finito de ***'vértices'*** distintos unidos por ***'arcos'.*** Formalmente, un grafo dirigido es un par de la forma G=(N, A), donde:

  - N es un conjunto finito no vacío de nodos.
  - A es un conjunto de pares *ordenados* (vacío o no vacío), llamados *arcos directores*, que describen la conexión desde el primer nodo hacia el segundo. Así (A,B) ≠ (B,A).

Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, un grafo dirigido es una relación sobre el conjunto N de los nodos del grafo. Como consecuencia de ello, **un grafo puede tener las mismas propiedades que las relaciones a las que representa.**

- **Grafo regular-**. Si todos sus vértices tienen el mismo grado.

- **Grafo completo.**- Un grafo regular se dice que es **completo** si en cada nodo existe una arista que sale a cada uno de los nodos restantes del grafo (cada nodo es adyacente con todos los demás).

- **Grafo etiquetado o ponderado**.- Es un grafo al que se le han asignado valores a sus aristas. Si no es así, se considera que se etiqueta con 1.

- **Grafo nulo**.- Es aquel que todos sus nodos son aislados, es decir A= Ø.

- **Subgrafo.-** *Es también un grafo* (dirigido o no), extraído del grafo original. Formalmente el grafo G'=(N', A'), es subgrafo de G=(N, A) si

    - N´ es un subconjunto no vacío de nodos de N.

    - A´ es un subconjunto de A (vacío o no).

Es decir, la forma de obtener un subgrafo de otro grafo es eliminando nodos y/o aristas.

- **Pseudografo**[4].- Es un grafo (o grafo dirigido) en el que se permiten aristas (arcos) cuyos extremos salen y entran al mismo nodo, es decir, cada arista (arco) forma un **bucle o lazo** sobre sí mismo, siendo un conjunto de la forma {A,A} o un par ordenado de la forma (A,A), para grafo no dirigido y dirigido respectivamente. El grado de un nodo que solo tiene un bucle es 2.

- **Multigrafo**.- Es un grafo en el que puede haber más de una arista entre dos nodos cualesquiera. Si el grafo es dirigido esas aristas deben ir en la misma dirección. Se dice que estas aristas repetidas son **paralelas**. Formalmente, en el conjunto A de aristas (arcos), puede haber dos con los mismos extremos pero ser distinta arista (arco). Luego se verá como diferenciarlos.
  Las categorías de grafo, digrafo pseudografo y multígrafo, no son excluyentes entre sí. Por ejemplo podemos tener multipseudodigrafos.

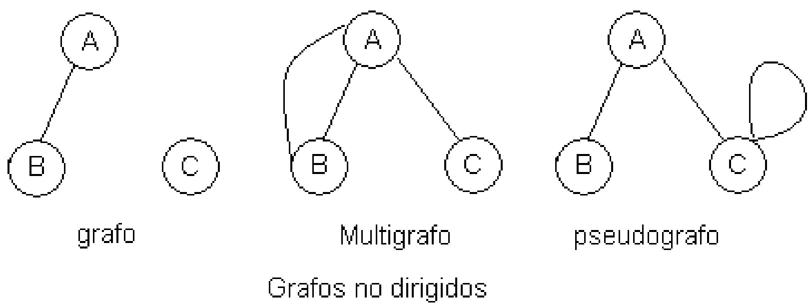


Figura 4.1. Grafos diversos

[4] Algunos autores consideran que no es necesaria la distinción entre pseudografo y grafo.

Dependiendo de la disciplina en la que utilicemos los grafos, serán más típicos unos u otros tipos de grafos.

- **Camino.**- Es una *sucesión finita de nodos y aristas (arcos) alternativamente, de manera que entre dos nodos adyacentes hay una arista.* La definición de adyacencia antes dada hace que *el camino no dirigido no sea igual al camino dirigido.* No obstante habrá casos en los que nos interese analizar caminos no dirigidos en un digrafo, (esto es, obviando las direcciones de las flechas). Excepto para los multígrafos (más de un camino entre dos nodos adyacentes), la sucesión puede simplificarse a una secuencia de sólo nodos, dado que en un grafo solo hay un posible camino entre dos nodos adyacentes.

- **Longitud de un camino**.- Si el grafo no está etiquetado es el número *de aristas (arcos) que tiene*. Si la arista (arco) está etiquetada con números, a esta etiqueta se le suele llamar *longitud* de la arista (arco), y la longitud total del camino será la suma de las etiquetas de las aristas (arcos).

- **Camino elemental, simple o ruta.**- Es aquel que no pasa dos veces por el mismo nodo.

- **Camino sencillo**.- Es aquel que no pasa dos veces por la misma arista.

- **Camino abierto.**- Cuando en un camino, el último nodo no es el mismo que el primero.

- **Camino Cerrado o ciclo.**- si el último nodo del camino es el mismo que el primero y al menos hay dos aristas distintas. Formalmente, dados los nodos de un camino ($n_1 \ldots n_k$), donde $n_1=n_k$ y $k \geq 1$, y todos los nodos son distintos excepto n_1 y n_k. Como consecuencia de esta definición si un grafo es no dirigido, el número de aristas del ciclo será mayor que 2. En un multígrafo no dirigido se admiten en el ciclo dos aristas, si estas no son repetidas.

- **Circuito[5].**- Camino cerrado sencillo: no se repite ninguna arista (arco).

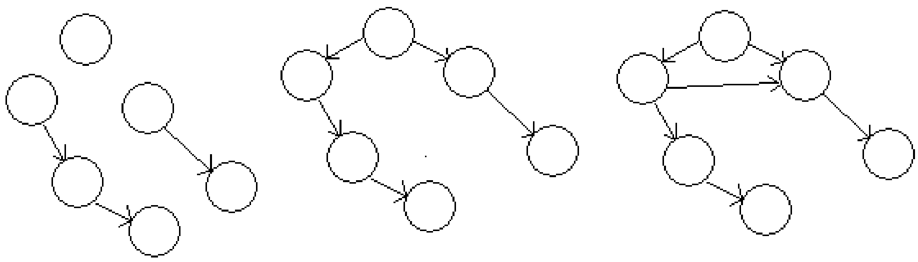
[5] Hay autores que no distingue entre camino cerrado y circuito

- **<u>Grafo conexo.-</u>** Cuando entre dos nodos cualesquiera (todos) hay al menos un *camino no dirigido* (tanto grafos como digrafos). Dicho de otra forma, hay un camino no dirigido para cada dos nodos cualesquiera del grafo. Si no es conexo, es **no conexo, inconexo o desconexo**. Los conexos se pueden clasificar en:

    - **<u>Grafo simplemente conexo o poliárbol.-</u>** Cuando para cada dos nodos cualesquiera (todos) hay solo un camino no dirigido y solo uno.

    - **<u>Grafo múltiplemente conexo.-</u>** Para algún par de nodos (alguno) hay 2 o más caminos no dirigidos entre ellos (como consecuencia de la definición, si hay un camino no dirigido cerrado, es múltiplemente conexo).

- **<u>Grafo fuertemente conexo.</u>-** Es un grafo dirigido en el que entre dos nodos cualesquiera (todos) hay al menos un camino dirigido. Esto significa que, dados dos nodos cualesquiera A y B, se puede llegar de A a B y de B a A.



a) Inconexo b) Simplemente conexo c) Múltiplemente conexo

Fig 4.2.- Grafos conexos

Se puede observar en la figura 4.2. que son grafos dirigidos. Para clasificarlos como conexos se tiene en cuenta el camino no dirigido, por tanto obviamos las flechas de dirección.

- **<u>Grafo euleriano</u>**.- Un camino euleriano es aquel camino sencillo (las aristas aparecen una y solo una vez) que contiene todas las aristas del grafo. Si un grafo tiene algún circuito euleriano, se dice que es un grafo euleriano.

  Un circuito euleriano se dará siempre que todos y cada uno de los vértices tengan un grado par.

- **Grafo hamiltoniano**.- Un camino hamiltoniano es un camino simple que contiene todos los vértices del grafo una y solo una vez. Si hay un ciclo simple (camino simple cerrado), se dice que el grafo es hamiltoniano. Todavía no se ha encontrado un método eficaz para resolver un camino hamiltoniano.

4.1.1. Grafos no dirigidos

- **Longitud de un ciclo**.- Número de aristas distintas que tiene un camino cerrado.

- **Árbol o árbol libre.-** Un grafo conexo que no tiene ciclos (acíclico).

  Un árbol tiene las siguientes características:
    - Para n nodos, hay exactamente n-1 aristas.
    - Si se añade una arista, entonces se produce un ciclo
    - Si se elimina una arista, entonces deja de ser conexo.

- **Árbol de expansión.-** Dado un grafo conexo y no dirigido G(N,A), se dice que el subgrafo conexo no dirigido de G, G'(N,A'), resultante de quitar a G todos los ciclos *es su árbol de expansión*.

- **Bosque**.- Es un grafo que no tiene ciclos pero que no es conexo. Para cumplir con la definición, cada subgrafo conexo que pertenece al bosque es un árbol (de ahí el nombre de bosque).

3.1.2. Grafos dirigidos

Dado el grafo dirigido de la figura 3 vamos a definir la relación entre sus nodos:

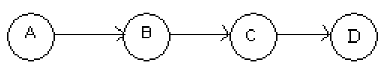


Fig 3.3. Grafo dirigido simple

- A es **precedesor** de B y viceversa, B es **sucesor** de A. (distancia 1)

- A es **antepasado** de D si se da una de las siguientes condiciones:
  A es predecesor de D o
  - Existen un nodo B que es sucesor de A y antepasado de D (definición recursiva, para distancia >1).

- D es **descendiente** de A si se da alguna de las siguientes condiciones:

  - D es sucesor de A o

  - Existen un nodo C que es predecesor de D y descendiente de A (definición recursiva para distancia >1).

- A y B son **familia.** Una familia es el conjunto de un nodo y de todos sus padres (si tuviera más de uno).

- **Ciclo (dirigido).-** Cuando, habiendo un camino cerrado, este se puede recorrer en la dirección indicada por los arcos (camino cerrado para un digrafo).

- **Bucle[6].-** Cuando, habiendo un camino no dirigido cerrado, este NO se puede recorrer en la dirección indicada por los arcos.

- **Grafo Dirigido Acíclico (GDA -DAG en inglés-).-** son aquellos grafos dirigidos en los que no hay ciclos (aunque sí puede tener bucles). En estos, **PADRE** es sinónimo de predecesor e **HIJO** es sinónimo de sucesor. Los nodos que no tienen hijos (no tienen descendientes) se llaman **TERMINALES, HOJAS O EXTREMOS.** A su vez todos los nodos que no son extremos, se denominan **NO TERMINALES O INTERNOS**.
  Un GDA *conexo* define una relación de orden parcial sobre N, conjunto de los nodos (además de la propiedad reflexiva y antisimétrica, cumple la propiedad

[6] No confundir con los bucles de los pseudografos.

transitiva; si tuviese ciclos, ya no cumpliría esta última, y por lo tanto no podríamos determinar un primero y un último). Algunos detalles:

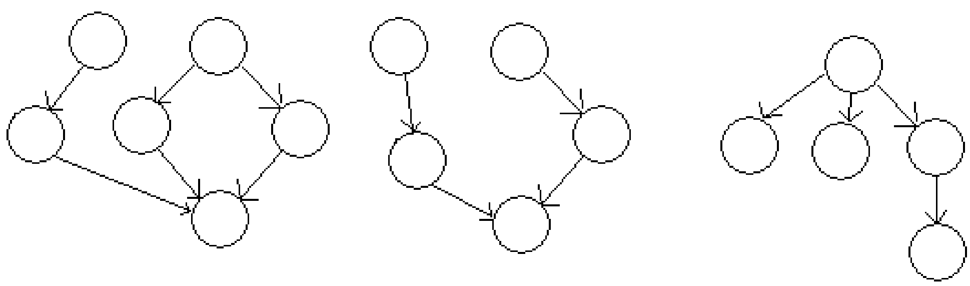
- Un hijo puede tener varios padres

- Como mínimo tiene un nodo del que solo salen arcos y como mínimo tiene un nodo al que solo le llegan los arcos (dirigidos).

- **Poliárboles.-** Son **GDA,s conexos** que **no tienen bucles** (es decir, no tiene caminos cerrados). Al igual que en los anteriores, un nodo puede tener más de un padre.

- **Árboles con raíz (dirigidos)-** Son poliárboles (GDA,s conexos sin bucles) en los que cada nodo tiene exactamente un padre. Sus propiedades son:
  - Existe un único nodo que no tiene antepasados y que además es antepasado de todos los demás. Se denomina **RAÍZ.**
  - Esta raíz no tiene ningún padre. El resto de nodos tienen exactamente un padre. Los nodos que tienen el mismo padre son **HERMANOS.**

    A partir de la definición se deduce que, para cualquier nodo del árbol, existe un camino (y solo uno) desde este nodo hasta el nodo raíz. A este camino se le llama **rama** del árbol (recordar que es antepasado de todos los nodos, y por tanto ese camino tiene que existir).



a) GDA (con bucle) b) Poliárbol c) Árbol con raíz

Fig 3.4. Grafos dirigidos

Si se señaliza la raíz como tal, podremos dibujar el árbol con aristas sin dirección, ya que esta estará implícita en él mismo.

Además, tiene las mismas características que un árbol libre:

- Para n nodos, hay exactamente n-1 aristas.
- Si se añade una arista, entonces se produce un bucle o un ciclo.
- Si se elimina una arista, entonces deja de ser conexo.

- **Árbol de expansión.-** Dado un grafo conexo y no dirigido G=⟨N, A⟩, se dice que el subgrafo conexo no dirigido de G, G'=⟨N', A'⟩, es el resultante de quitar a G todos los bucles y ciclos *es su árbol de expansión*.

4.2. ÁRBOLES Y GDA,S DE UNA RAÍZ

Dado un nodo cualquiera del árbol con raíz, o un nodo cualquiera en un GDA con solo una raíz, este tiene unas características:

- **Altura de un nodo**.- número de arcos, POR EL CAMINO MÁS LARGO, desde ese nodo hasta un nodo terminal. La altura de un nodo terminal es cero.
- **Altura del árbol o GDA con una raíz**.- Es la altura del nodo raíz.

- **Profundidad de un nodo**.- Número de arcos que hay desde el nodo raíz a ese nodo POR EL CAMINO MÁS CORTO (esto es obvio en el caso de árboles, en el que solo hay un camino posible). La profundidad de la raíz es cero y la de cualquier otro nodo es la de su antecesor (padre) menos profundo más 1 (recordar que en un GDA –con una raíz en este caso-, se puede dar el caso de tener un nodo que tenga más de un padre).

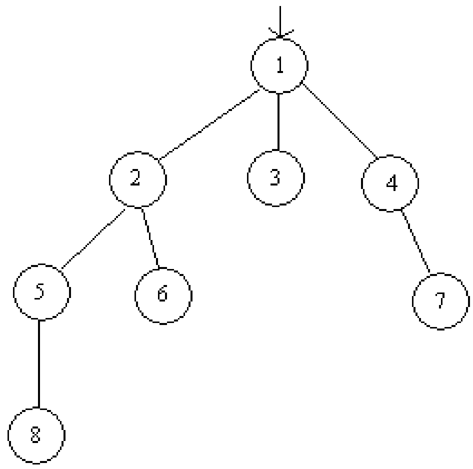
- **Profundidad del árbol o GDA con una raíz**.- El número de arcos que hay desde el nodo raíz hasta el nodo terminal menos profundo.

- N**ivel de un nodo en un árbol.-** En la mayor parte de la bibliografía consultada, el concepto se define como nivel de profundidad del nodo, siendo por tanto sinónimo de profundidad. Así la raíz está en el nivel 0, sus hijos en el nivel 1, ….

Otros autores definen el nivel como la diferencia de la altura de la raíz menos la profundidad del nodo. Esta definición, que es poco usual, y es equivalente a decir que los nodos terminales más profundos están en nivel 0, sus padres en el nivel 1….

Ejemplo 4.1.

Dado el árbol de la figura, identificar cada parámetro del mismo.



- Profundidad del árbol.- El nodo terminal menos extremo es el 3, luego la profundidad del árbol es 1.

- El nodo 8, 6, 3 y 7 tienen una altura 0 (son terminales)

- El nodo 5 y 4 tienen una altura 1.

- El nodo 2 tiene una altura 2. (recordar, camino más largo a un nodo terminal, el 8 en este caso)

- El nodo 1, que es el raíz tiene una altura de 3, que es la altura del árbol (el camino más largo a un nodo terminal es al nodo 8).

- La profundidad del nodo 1, el raíz, es 0. Dicho de otra forma, el nivel del nodo 1 es 0.

- Los nodos 2, 3 y 4 están a profundidad 1. Dicho de otra forma, los nodos 2, 3 y 4 están en el nivel 1 (con la segunda definición en el nivel 2).

- Los nodos 5, 6 y 7 están a profundidad 2. Dicho de otra forma, los nodos 5, 6 y 7 están en el nivel 2(con la segunda definición en el nivel 1).

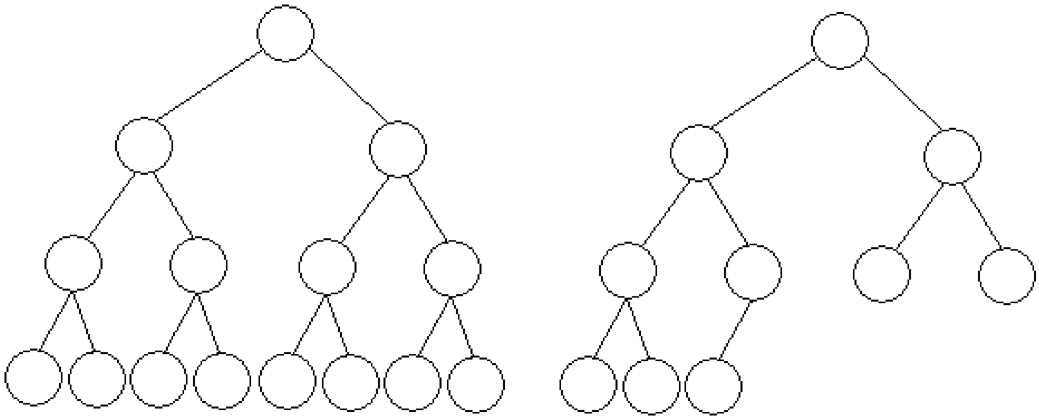
- La profundidad del nodo 8 es 3. Dicho de otra forma el nodo 3 está en el nivel 3 (con la segunda definición en el nivel 0).

--

4.2.1 Árboles binarios

Es un árbol (con raíz) tal que el grado de todos sus nodos no es superior a tres. De aquí se deduce que cada nodo solo puede tener dos hijos como máximo, conocidos como *hijo izquierdo e hijo derecho* (una arista es la que viene del padre y las otras dos de sus posibles hijos).

Se dice que un árbol binario es **completo** (no confundir con la definición de completo en los grafos en general) si todos sus nodos tienen cero o dos hijos; los que tienen cero hijos son nodos terminales y se caracterizan por estar a la misma profundidad. Es **casi-completo o esencialmente completo** si, dado un árbol de profundidad n, todos los nodos de profundidad n-2 tienen dos hijos y los de profundidad n-1 tienen 0, 1 (que se representa a la izquierda) ó 2 hijos. Además se representan de izquierda a derecha, de manera que los nodos del nivel n-1 que son no terminales, primero se representan los que tienen 2 hijos, luego el que tiene un hijo y luego los que son terminales.



a) Arbol binario completo b) Arbol binario casi-completo

Fig 3.5. Árboles binarios

4.3.MATRIZ DE ADYACENCIA

Es la manera analítica de representar un grafo o un grafo dirigido (pensar que la manera gráfica está limitada a grafos o digrafos sencillos, ya que, en caso contrario, serían ilegibles). Según se trate de un grafo o un digrafo tenemos dos matrices distintas:

- Grafo no dirigido.- Dado un grafo $G=\langle N, A\rangle$, donde hay n nodos, etiquetados de 1 a n, la matriz M_n de adyacencia se define como la matriz cuadrada de dimensión n, donde cada elemento m_{ij} (para los valores $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$) toma el valor 1 ó 0:

  - Si la arista $\{i,j\} \in A$, entonces los elementos m_{ij} y m_{ji} toman el valor 1.

  - Si la arista $\{i,j\} \notin A$, entonces los elementos m_{ij} y m_{ji} toman el valor 0.

- Grafo no dirigido.- Dado un grafo dirigido $G=\langle N, A\rangle$, donde hay n nodos, etiquetados de 1 a n, la matriz M_n de adyacencia se define como una matriz cuadrada de dimensión n, donde cada elemento m_{ij} (para los valores $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$) :

- Toma el valor 1 si el arco (i,j) $\in$ A

- Toma el valor 0 si el arco (i,j) $\notin$ A

  recordar que en el grafo dirigido, (i,j) es un par ordenado y por tanto (i,j)$\neq$(j,i)

La matriz de adyacencia va a representar, para un nodo concreto, los nodos que están conectados a este (caminos de longitud 1):

- Para grafos no dirigidos, los que están en la fila (columna) del nodo (es una matriz simétrica).

- Para grafos dirigidos, son los nodos que están en la fila y la columna del nodo en cuestión.

Ejemplo 4.2.

Matriz de adyacencia para el árbol del ejemplo 4.1.

$$G = \begin{vmatrix} 0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \end{vmatrix}$$

--

BIBLIOGRAFÍA

[Brassard et al 1997] Brassard, G., Bratley, P. *Fundamentos de Algoritmia.* 1ª Edición. Madrid (España): Pearson Educación S.A, impresión de 2006. ISBN 9788489660007

[Bujalance et al, 1993] Bujalance, E., Bujalance, J.A., Costa, A.F., Martínez. E. *Elementos de Matemática Discreta*. 1º edición. Madrid (España): Editorial Sanz y Torres, S.L, 2003. ISBN 84-88667-00-0

[Devore, 2005] Devore, J. L. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 6ª edición. Mexico: Thomson Learning, 2005. ISBN 970-686-457-1

[de la Fuente 2010] de la Fuente López, R.,J. *Inteligencia Artificial. Introducción y tareas de búsqueda*.[en línea]. [consulta 21-6-2010] disponible en: http://www.innova.uned.es/webpages/aconute/index.html.

[Etayo et al, 1983] Etayo, J., Colera, J., Ruiz, A. *Matemáticas 1º BUP.* Aprobado por OM de 5-3-1976. Madrid (España): Editorial Anaya, impresión en 1983. ISBN 84-207-1703-7

[Fernández, 2003] Fernández Laguna, V. *Teoría básica de conjuntos*. 1ª edición. Madrid (España): Grupo Anaya, 2003. ISBN 8466726144

[Grassmann et al, 1998] Grassman, W., Tremblay, J.P.. Matemática discreta y lógica. 1ª edicion. Madrid(España): Editorial Prentice Hall 1998. Impresión 2010. ISBN 978-84-89660-04-5.

[Hopcroft et al 2002]. Hopcroft, J.E., Motwani, R., Ullman, J.D. *Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación*. 2ª edición. Madrid (España): Pearson Educación S.A. 2002. Reimpresión 2007. ISBN 978-84-7829-056-7

[Lazcano et al, 1984] Lazcano Uranga, I., Barolo Babolín. P.. *Matemáticas 1FP2*. Aprobado por OM de 18-5-1977. Zaragoza (España): Editorial Luis Vives, impresión en 1984. ISBN 84-263-0298-X

[Manzano et al 2005] Manzano, M., Huertas, A. *Lógica para principiantes*. 1ª edición. Madrid (España): Alianza Editorial, 2005. 1ª impresión. ISBN 84-206-4570-2

[Mira et al 2005] Mira, J., Delgado, A.E., Boticario, J.G., Diez, F.J. *Aspectos básicos de la inteligencia artificial.* 1º Edición. Madrid (España): Editorial Sanz y torres, S.L., 2005. ISBN 84-88667-13-2

[Díez 1998] Díez, F.J., *Introducción al razonamiento aproximado.* [en línea] . UNED. 1ª edición. Madrid: UNED 1998, revisión 2005. [consulta 15-11-2008]. Formato PDF, disponible en: http://www.ia.uned.es/~fjdiez/libros/razaprox.html.

Ref.: 16/2011/2164
D/Dª Roberto José FUENTE LÓPEZ

MADRID

Para su conocimiento y efectos oportunos, se le notifica que el Registro Territorial de la Propiedad Intelectual de la Comunidad de Madrid ha adoptado, con fecha 21 de marzo de 2011, la siguiente Resolución:

*"Vista la solicitud de inscripción de derechos sobre la obra titulada **"Matemática discreta: conjuntos, combinatoria y grafos"**, presentada en el Registro General de la Propiedad Intelectual, el 2 de agosto de 2010, a la que correspondió el **nº M-006425/2010**, y examinada la documentación aportada junto a ella, ha obtenido calificación jurídica favorable.*

Por ello, de conformidad con lo dispuesto por el artículo 145.2 del Texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, aprobado por Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril, y de acuerdo con las funciones atribuidas a los Registros Territoriales por el artículo 3 del Reglamento del Registro General de la Propiedad Intelectual, aprobado por Real Decreto 281/2003, de 7 de marzo,

RESUELVO

***Primero.-** Practicar la inscripción de derechos instada por D/Dª Roberto José FUENTE LÓPEZ, sobre la obra titulada **"Matemática discreta: conjuntos, combinatoria y grafos"**, presentada en el Registro de la Propiedad Intelectual, el 2 de agosto de 2010, a la que correspondió el **nº M-006425/2010**.*

***Segundo.-** Remitir al solicitante copia de la matriz correspondiente."*

En cumplimiento de esta Resolución, se remite copia de la matriz de inscripción con nº de asiento registral 16/2011/2164, de fecha 21 de marzo de 2011.

De conformidad con lo establecido en el artículo 145.2 del texto Refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, contra los acuerdos del Registrador podrán ejercitarse directamente ante la jurisdicción civil las acciones correspondientes.

Madrid, 24 de marzo de 2011
JEFA DE SUBSECCIÓN DE PUBLICIDAD REGISTRAL

COMUNIDAD DE MADRID
REGISTRO DE LA PROPIEDAD INTELECTUAL
Vicepresidencia, Consejería de Cultura y Deporte y Portavocía del Gobierno

Fdo.: Mª Antonia Morla Juaristi

REGISTRO GENERAL DE LA PROPIEDAD INTELECTUAL

Según lo dispuesto en la Ley de Propiedad Intelectual (Real Decreto Legislativo 1/1996, de 12 de abril), quedan inscritos en este Registro los derechos de propiedad intelectual en la forma que se determina seguidamente:

NÚMERO DE ASIENTO REGISTRAL 16 / 2011 / 2164

Título: Matemática discreta: conjuntos, combinatoria y grafos
Objeto de propiedad intelectual: Texto
Clase de obra: Científica

PRIMERA INSCRIPCIÓN

Autor/es y titular/es originarios de derechos

- **Apellidos y nombre:** FUENTE LÓPEZ, Roberto José
  Nacionalidad: ESP **D.N.I./N.I.F./Pasaporte:**

Datos de la solicitud

Núm. solicitud: M-6425-10
Fecha de presentación y efectos: 02/08/2010 **Hora:** 09:38

En Madrid, a veintiuno de marzo de dos mil once

COMUNIDAD DE MADRID
REGISTRO DE LA PROPIEDAD INTELECTUAL
Vicepresidencia, Consejería de Cultura y Deporte y Portavocía del Gobierno

EL REGISTRADOR TERRITORIAL

Fdo.: ALEJANDRO PUERTO MENDOZA

COMUNIDAD DE MADRID
REGISTRO DE LA PROPIEDAD INTELECTUAL
Vicepresidencia, Consejería de Cultura y Deporte y Portavocía del Gobierno