

MATEMÁTICA DISCRETA: Conjuntos, combinatoria y grafos

© Roberto J. de la Fuente López

Versión 20100712



## Índice general

<b>ÍNDICE GENERAL</b> .....	3
<b>PRÓLOGO</b> .....	5
<b>CAPÍTULO 1.- TEORÍA DE CONJUNTOS</b> .....	7
<b>1.1. ¿QUÉ ES UN CONJUNTO?</b> .....	7
<b>1.2. CARDINAL DE UN CONJUNTO</b> .....	9
<b>1.3. RELACIONES DE PERTENENCIA DE CONJUNTOS Y ELEMENTOS</b> .....	10
<i>1.3.1. Pertenencia de un elemento a un conjunto</i> .....	10
<i>1.3.2. Pertenencia de un conjunto a otro conjunto</i> .....	10
<b>1.4. CONJUNTOS ESPECIALES</b> .....	12
<i>1.4.1. Conjunto universal</i> .....	12
<i>1.4.2. Conjunto “partes de un conjunto”</i> .....	13
<b>1.5. OPERACIONES CON CONJUNTOS</b> .....	14
<i>1.5.1 Operaciones</i> .....	15
<i>1.5.2. Propiedades</i> .....	17
<i>1.5.3. Generalización de las operaciones</i> .....	19
<i>1.5.4. Conjunto particiones de un conjunto</i> .....	20
<b>1.6. PAR ORDENADO</b> .....	20
<b>1.7 SECUENCIA Y TUPLA</b> .....	21
<b>1.8. PRODUCTO CARTESIANO</b> .....	21
<b>1.9. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS</b> .....	23
<i>1.9.1. Propiedades de las relaciones binarias</i> .....	23
<i>1.9.2. Relaciones de equivalencia</i> .....	24
<i>1.9.3. Relaciones de orden</i> .....	25
<i>1.9.4. Propiedades de la inclusión de conjuntos</i> .....	25
<i>1.9.5. Representación gráfica de una relación sobre un conjunto</i> .....	26
<i>1.9.6. Correspondencia entre conjuntos</i> .....	27
<i>1.9.7. Correspondencia inversa de una dada</i> .....	28
<b>1.10. APLICACIÓN ENTRE CONJUNTOS</b> .....	28
<i>1.10.1. Aplicación suprayectiva</i> .....	29
<i>1.10.2. Aplicación inyectiva</i> .....	30
<i>1.10.3. Aplicación biyectiva</i> .....	30

1.11. PRINCIPIO DE ADICCIÓN .....	30
1.12. PRINCIPIO DEL PRODUCTO .....	31
1.12.1. Diagrama de árbol para el producto cartesiano .....	32
1.13 PRINCIPIO DE LA DISTRIBUCIÓN.....	34
1.14. CONJUNTOS INFINITOS.....	35
<b>CAPÍTULO 2.- COMBINATORIA .....</b>	<b>39</b>
2.1. VARIACIONES CON REPETICIÓN .....	39
2.1.1. Cálculo de las variaciones con repetición.....	40
2.1.2. Diagrama de árbol para variaciones con repetición .....	40
2.2. VARIACIONES SIN REPETICIÓN .....	41
2.2.1. Diagrama de árbol para variaciones sin repetición .....	42
2.2.2. Factorial de un número.....	44
2.2.3. Cálculo de las variaciones sin repetición.....	44
2.3. PERMUTACIONES .....	45
2.3.1. Cálculo de las permutaciones.....	45
2.4. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN.....	46
2.5. COMBINACIONES SIN REPETICIÓN .....	50
2.5.1 Cálculo de combinaciones sin repetición.....	51
2.6. COMBINACIONES CON REPETICIÓN .....	53
2.6.1. Cálculo de las combinaciones con repetición.....	54
2.7. PRINCIPIO DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN (CONJUNTOS).....	56
<b>CAPÍTULO 3.- TEORÍA DE GRAFOS .....</b>	<b>59</b>
3.1.- DEFINICIONES .....	59
3.1.1. Grafos no dirigidos .....	63
3.1.2. Grafos dirigidos .....	64
3.1.3. Árboles con raíz.....	66
3.2. ARBOLES Y GDA,S DE UNA RAIZ.....	66
3.3.MATRIZ DE ADYACENCIA .....	69
<b>APENDICE A.- BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS EN INTERNET .....</b>	<b>71</b>

## **Presentación**

Este documento está dirigido a todo aquel que necesite recordar conocimientos matemáticos sobre teoría de conjuntos, combinatoria y teoría de grafos, en especial a los estudiantes de primer y segundo año de ingeniería informática. También para todo aquel que necesite una guía rápida de conceptos.

- Teoría de conjuntos.- Con ella se entiende mejor la lógica matemática, la matemática combinatoria, la especificación de lenguajes de programación y la teoría de autómatas y computación.
- Combinatoria.- Necesaria para todos los ámbitos: desde estadística al análisis de algoritmos.
- Teoría de grafos.- En esta se basan muchas de las técnicas de programación avanzadas.

No se ha pretendido sustituir a ningún tratado matemático, sino construir una guía de conceptos, los cuales se presentan de una manera más intuitiva que formal, no entrando en demostraciones matemáticas.

Este documento nace de la experiencia propia de volver a estudiar una carrera universitaria después de varios años en la vida laboral. Esta pasa por volver a recordar muchos conceptos olvidados, que se supone que se saben, y que, por tanto, se pasan por alto o se tratan de manera superficial.

## **Aviso de derechos de autor**

El autor se reserva todos los derechos. No obstante, el lector lo puede imprimir cuantas veces necesite y también lo puede transmitir por cualquier medio. Cualquier otro uso precisa del permiso previo y por escrito del autor.

Roberto J. de la Fuente López

# CAPÍTULO 1.- TEORÍA DE CONJUNTOS

## 1.1. ¿QUÉ ES UN CONJUNTO?

Un conjunto es una colección de **elementos distintos** que tienen alguna propiedad en común, y que además la cumplen todos ellos.

Como notación para **identificar un conjunto**, vamos a utilizar **letras mayúsculas**. Esto es más intuitivo que si cada vez que operamos con él, lo tuviésemos que llamar “*el conjunto de elementos que cumplen...*”. Como notación genérica para **identificar** cada uno de los **elementos**, vamos a utilizar **letras minúsculas**.

Para representar un conjunto, se delimitan los **elementos entre llaves** y lo llamamos con una letra mayúscula:

$$A = \{\text{elementos}\}$$

Un conjunto se puede definir de dos formas:

- **En extensión.-** Por la enumeración de todos y cada uno de sus elementos.

$$\text{Por ejemplo, } A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

- **Por comprensión.-** Por la declaración formal de una propiedad que cumplen todos y cada uno de sus elementos. Es posible que un mismo conjunto pueda tener varias declaraciones equivalentes.

Cuando un conjunto tiene pocos elementos, este se puede representar de forma gráfica. Así, si se trata de elementos numéricos, estos se pueden representar sobre una

regla horizontal, tabulada con los valores posibles y acumulando puntos encima, uno por cada valor

Ejemplo 1.1

Sea el conjunto  $C = \{1, 3, 4, 1\}$ , su representación en una regla horizontal será



Figura. 1.1 Representación en regla horizontal

--

Otra forma de representar gráficamente un conjunto es mediante los diagramas de Venn: Se representan los elementos del conjunto dentro de un polígono cerrado, que será normalmente un círculo u óvalo, y que se etiqueta con el nombre del conjunto.

Ejemplo 1.2

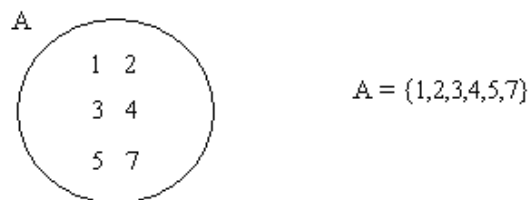


Figura 1.2. Representación con diagrama de Venn

--

En conjuntos que tienen muchos elementos, lo normal es que estos se definan por comprensión. ¿Porqué? porque si se hiciera en extensión, serían poco claros o ilegibles, además de requerir mucho tiempo para escribir todos los elementos.

Ejemplo 1.3

Sea el conjunto de alumnos de una academia X, los cuales reciben clases de matemáticas, que llamaremos A. Tenemos matriculados en matemáticas a Juan,

María, Pedro, Santiago, Eva, Carmen y Ángel, que denotamos por la letra minúscula que corresponde a la inicial del nombre.

- El conjunto  $A$  definido en extensión será  $A = \{j, m, p, s, e, c, a\}$
- El conjunto  $A$  definido por comprensión  $A = \{\text{alumnos de la academia } X \text{ que reciben clases de matemáticas}\}$
- Si resulta que las clases de matemáticas se dan en el aula 0.11, y este aula sólo se utiliza para matemáticas, podríamos tener una segunda definición por comprensión  $A = \{\text{alumnos de la academia } X \text{ que reciben clases en el aula } 0.11\}$
- Y si lo representamos con un diagrama de Venn,

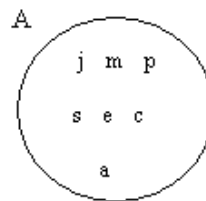


Figura 1.3. Representación con diagrama de Venn del ejemplo 1.3.

--

## 1.2. CARDINAL DE UN CONJUNTO

Hasta que lleguemos a los conjuntos infinitos, vamos a considerar conjuntos con un *número finito de elementos*. Así, dado el conjunto  $A$ , la cardinalidad de este conjunto es el **número de elementos** de  $A$ , y se denota por  $|A|$ .

Ejemplo 1.4

En el ejemplo 1.3 de alumnos de matemáticas, la cardinalidad de  $A$  es:  $|A| = 7$

--

### 1.3. RELACIONES DE PERTENENCIA DE CONJUNTOS Y ELEMENTOS

#### 1.3.1. Pertenencia de un elemento a un conjunto

La pertenencia de un elemento a un conjunto se denota por el símbolo  $\in$ . La no pertenencia se denota por el símbolo  $\notin$ .

Ejemplo 1.5

- Elemento Juan pertenece a A:  $j \in A$
- Si existe un alumno de la misma academia llamado Bernardo, pero que no recibe clases de matemáticas, b no pertenece a A:  $b \notin A$

--

Podemos tener un conjunto que **no** tenga **elementos**: en este caso se denota por el símbolo del **conjunto vacío** “  $\emptyset$  ”, o el **conjunto sin elementos** “ $\{\}$ ” y su cardinalidad será 0.

Ejemplo 1.6

Sea B un conjunto  $B = \{\text{alumnos de la academia X que reciban clases de esperanto}\}$ . Sabemos que no hay ningún alumno. Esto se denotaría como  $B = \emptyset$  o como  $B = \{\}$  (Notar que aquí no hay llaves:  $\emptyset$  es un conjunto y no el símbolo de elemento vacío)

--

#### 1.3.2. Pertenencia de un conjunto a otro conjunto

Con esta *relación* (luego se verán las relaciones de conjuntos) definimos la **inclusión de conjuntos**. Dados dos conjuntos,

$$A = \{\text{alumnos de matemáticas de la academia X}\}$$

$$X = \{\text{alumnos de la academia X}\}$$

se dice que  $A$  está incluido en  $X$  ( $A$  es parte de  $X$ ,  $A$  está contenido en  $X$ ) si se da una de estas dos condiciones:

- Si todos los elementos de  $A$  también pertenecen a  $X$ , pero no todos los elementos de  $X$  están en  $A$ .
- Si todos los elementos de  $A$  también pertenecen a  $X$ , y todos los elementos de  $X$  pertenecen a  $A$ . Este es un caso particular, en el que se dice que **los conjuntos  $A$  y  $X$  son iguales**.

Si se cumple alguna de estas dos condiciones, se dice que  **$A$  es un subconjunto de  $X$** , y lo denotamos como  $A \subset X$ . Si hay otro conjunto  $B$  que no cumple ninguna de ellas, se dice que  $B$  no es un subconjunto de  $X$ , y se denota como  $B \not\subset X$ .

Si se cumple solo la primera condición se dice que  $A$  es un **subconjunto propio** de  $X$ .

Algunos autores distinguen la notación de inclusión de conjuntos dependiendo de la propiedad que cumple. Así denotan con  $\subset$  los subconjuntos propios, y denotan la manera general (subconjunto propio o conjuntos iguales) con  $\subseteq$ . Aquí utilizaremos el símbolo  $\subset$  de manera general, indicando en ocasiones la otra notación.

Más adelante se verán las relaciones entre conjuntos y será entonces cuando veremos las propiedades de la relación de inclusión.

### Ejemplo 1.7

En nuestro ejemplo de la academia ¿el conjunto vacío está incluido en  $X$  (conjunto sin alumnos)?

El conjunto vacío SIEMPRE cumple la primera condición, luego estará incluido en cualquier conjunto. Así  $\emptyset \subset X$ .

--

## 1.4. CONJUNTOS ESPECIALES

Uno de ellos, que ya se ha visto, que es el conjunto vacío, denotado  $\emptyset$

### 1.4.1. Conjunto universal

Es el conjunto de TODOS los elementos posibles y lo denotamos con  $X$ . (Como hemos dicho antes, de momento vamos a considerar conjuntos de cardinalidad finita)

En la representación gráfica con diagramas de Venn, lo vamos a denotar con un rectángulo que contiene los subconjuntos de  $X$  y que etiquetaremos con el nombre  $X$

#### Ejemplo 1.8

Continuando con el ejemplo de la academia,  $X$  representa el conjunto de todos los alumnos, luego se puede considerar como el conjunto universal de alumnos. A los que reciben clases de matemáticas y el resto de elementos los que no reciben clases de matemáticas (en nuestro ejemplo, el elemento  $b$ )

$$X = \{j, m, p, s, e, c, a, b\}$$

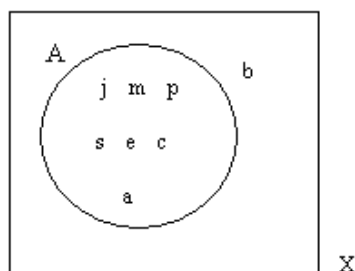


Figura 1.4. Diagrama de Venn para conjunto universal "academia"

--

### 1.4.2. Conjunto “partes de un conjunto”

Sea  $X$  el conjunto universal, el conjunto partes de un conjunto (o conjunto de las partes de  $A$ ) es el conjunto de todos los subconjuntos posibles que se pueden formar con los elementos de  $X$ . También se le denomina como “conjunto potencia de  $X$ ”, y se denota por  $\mathcal{P}(X)$ . Por comprensión se define como

$$\mathcal{P}(X) = \{ A \mid A \subset X \}$$

En extensión este conjunto contiene:

- Todos los subconjuntos de cardinalidad 0. En este caso es el conjunto vacío
- Todos los subconjuntos de cardinalidad 1
- Todos los subconjuntos de cardinalidad 2
- ...
- Todos los subconjuntos de cardinalidad  $|X|$ . En este caso es uno, precisamente el conjunto  $X$ .

Ejemplo 1.9

Continuando con el ejemplo de la academia,  $X = \{\text{alumnos}\}$

$$\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, \{j\}, \dots, \{j,m\}, \dots, \{j,m,p\}, \dots, X \}$$

--

Se hace hincapié en un detalle:  $\emptyset$  y  $X$  también pertenecen al conjunto potencia de  $X$ , ya que ambas cumplen con alguna de las condiciones para la inclusión de conjuntos.

El cardinal del conjunto potencia, dado que  $X$  es finito, será la suma del número de combinaciones (ver combinatoria, capítulo 2 punto 2.5) posibles de cardinalidad 1, más el número de combinaciones de cardinalidad 2, más..., más el número de combinaciones de cardinalidad  $X$ . Así nos queda el sumatorio:

$$\sum_{n=0}^m \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Donde  $m = |X|$  y  $n$  la cardinalidad de cada grupo de combinaciones. Operando se llega a la conclusión de que  $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

### Ejemplo 1.10

Siguiendo en la academia, la cardinalidad del conjunto potencia de  $X$  es

- Calculando el sumatorio  $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128$  elementos
- Utilizando la fórmula abreviada  $|\mathcal{P}(X)| = 2^7 = 128$  elementos.

--

## 1.5. OPERACIONES CON CONJUNTOS

El resultado de una operación con conjuntos finitos es siempre otro conjunto finito. Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , tal que  $A \subset X$  y  $B \subset X$ , siendo  $X$  el conjunto universal, vamos a definir sus operaciones y propiedades.

- **Operaciones.**- Unión, intersección, complementario de un conjunto dado y diferencia entre conjuntos.
- **Propiedades.**- Asociatividad, conmutatividad, idempotencia, distributividad, elemento neutro, elemento universal, elemento ínfimo, ley de simplificación o absorción, complementario para la unión, complementario para la intersección y leyes de “de Morgan”.

### 1.5.1 Operaciones

Se tienen las siguientes operaciones entre conjuntos:

- Unión de conjuntos.- Será otro conjunto al que pertenecerán los elementos pertenecientes a A, los elementos pertenecientes a B y, si existen, los elementos que pertenezcan a ambos.

Se denota por  $A \cup B$ , y, como es un conjunto,  $(A \cup B) \subset X$  y por comprensión podremos definirlo como

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o bien } x \in B\}$$

Su representación en diagramas de Venn (zona sombreada):

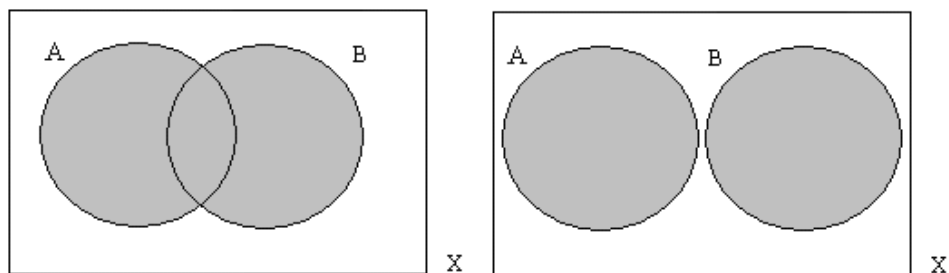


Figura 1.5. Diagramas de Venn para la unión de conjuntos. Izquierda con elementos comunes en la intersección y a la derecha sin ellos.

- Intersección de conjuntos.- Será otro conjunto al que pertenecerán los elementos que pertenecen a A y que también pertenezcan a B, es decir, los elementos comunes a ambos.

Se denota por  $A \cap B$ , y, como es un conjunto,  $(A \cap B) \subset X$  y por comprensión podremos definirlo como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y también } x \in B\}$$

Su representación en diagramas de Venn (zona sombreada):

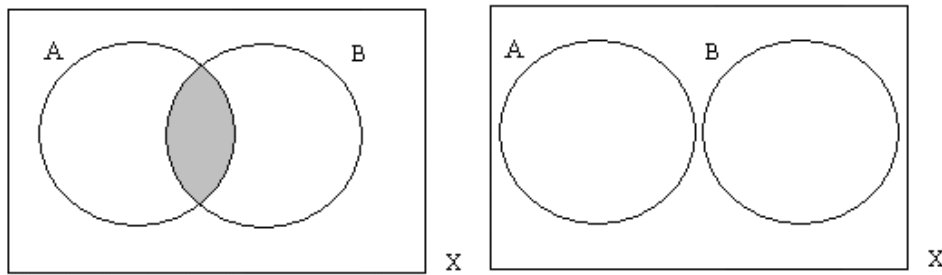


Figura 1.6. diagramas de Venn para la intersección de conjuntos  $A \cap B$

Se dice que dos **conjuntos** son **disjuntos** si su intersección es el conjunto vacío, es decir, cuando no tienen elementos en común (representado en el diagrama de Venn de la derecha en la figura 1.6)

- Complemento de un conjunto A.- Si  $A \subset X$ , entonces el complementario de A es el conjunto de todos los elementos de X que no pertenecen en A.

Se denota por  $nA$ ,  $A'$  o  $\bar{A}$

Su representación en diagramas de Venn (zona sombreada):

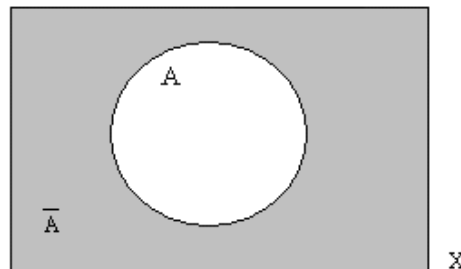


Figura 1.7. Diagrama de Venn para el complementario de un conjunto

- Diferencia de conjuntos.- La diferencia de A-B es un conjunto al que pertenecen todos los elementos de A que no pertenecen a B.

Si A y B son disjuntos,  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A-B = A$

Si A y B no son disjuntos,  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces  $A-B = A - (A \cap B) = A \cap \bar{B}$   
(zona sombreada oscura)

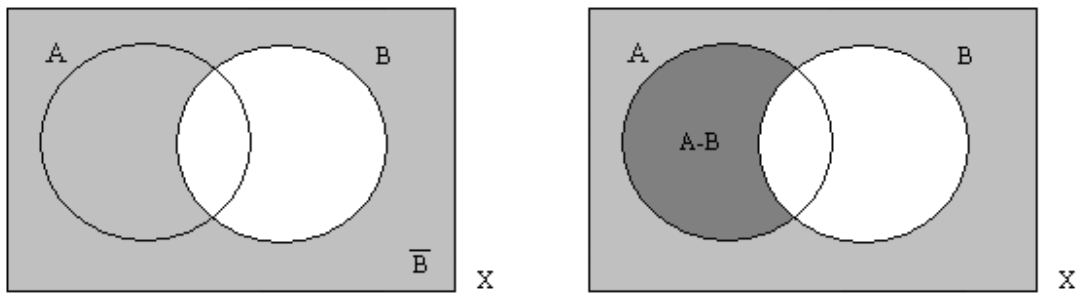


Figura 1.8. Diagrama de Venn para diferencia de conjuntos, donde  $A \cap B \neq \emptyset$

De forma general,  $A-B \subset A$  (subconjunto propio, que en la otra notación sería  $A-B \subseteq A$ ), la podremos definir por comprensión como

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

### 1.5.2. Propiedades

Para la unión, intersección y complementario tenemos una serie de propiedades:

- Asociatividad
  - Para la unión  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - Para la intersección  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  
- Comutatividad
  - Para la unión  $A \cup B = B \cup A$
  - Para la intersección  $A \cap B = B \cap A$
  
- Idempotencia
  - Para la unión  $A \cup A = A$
  - Para la intersección  $A \cap A = A$

- Distributividad
  - De la intersección respecto de la unión
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
  - De la unión respecto de la intersección
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- Elemento neutro
  - Unión: el conjunto vacío. Para cualquier  $C \subseteq X$ ,  $C \cup \emptyset = C$
  - Intersección: El conjunto universal. Para cualquier  $C \subseteq X$ ,  $C \cap X = C$
- Elemento universal
  - Para la unión  $A \cup X = X$
  - Para la intersección  $A \cap X = A$
- Elemento ínfimo
  - Para la unión  $A \cup \emptyset = A$
  - Para la intersección  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Ley de simplificación o absorción
  - Unión-intersección  $A \cup (B \cap A) = A$

Ejemplo 1.11

Si  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{a, b, d\}$ , entonces  $B \cap A = \{a, b\}$

y  $A \cup (B \cap A) = \{a, b, c\} \cup \{a, b\} = \{a, b, c\}$

--

- Intersección- unión  $A \cap (B \cup A) = A$

Ejemplo 1.12

Si  $A = \{a,b,c\}$  y  $B = \{a,b,d\}$ , entonces  $B \cup A = \{a,b,c,d\}$   
 y  $A \cap (B \cup A) = A = \{a,b,c\} \cap \{a,b,c,d\} = \{a,b,c\}$

--

- La unión de un conjunto con su complementario es el conjunto universal.

Dado  $A$  y  $\bar{A}$ ,  $A \cup \bar{A} = X$

- La intersección de un conjunto con su complementario es el conjunto vacío (son disjuntos por definición)

Dado  $A$  y  $\bar{A}$ ,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$

- Leyes “de Morgan”

- Respecto de la unión de complementarios  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

- Respecto de la intersección de complementarios  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

### 1.5.3. Generalización de las operaciones

Las definiciones que se han formulado para las operaciones lo han sido para dos conjuntos. Estas se pueden generalizar para varios conjuntos. Es fácil ver que se puede demostrar con las propiedades antes expuestas. Así dados  $n$  conjuntos,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , donde todos pertenecen al conjunto universal  $X$  (formalmente, para todo  $A_i \subset X$  donde  $1 \leq i \leq n$ ) podemos definir las operaciones

- La unión de estos conjuntos será el conjunto de los elementos que pertenecen a cada conjunto  $A_i$  y los elementos comunes entre ellos. Esta unión se denota por  $\bigcup \{ A_i \mid A_i \subset X \}$  (sombreado oscuro figura 1.9. izquierda).

- La intersección de estos conjuntos será el conjunto de todos los elementos que pertenecen a todos y cada uno de los conjuntos  $A_i$ . Esta intersección se denota por  $\bigcap \{ A_i \mid A_i \subset X \}$  (sombreado oscuro figura 1.9 derecha)

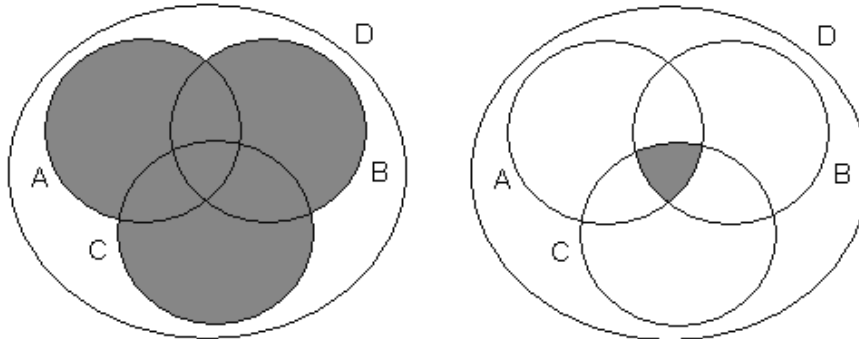


Figura 1.9. Unión (izquierda) e intersección (derecha) de varios conjuntos

#### 1.5.4. Conjunto particiones de un conjunto

Una vez que hemos visto las operaciones con conjuntos, ya podemos definir lo que es un conjunto “particiones” de otro conjunto. Sea  $A$  un conjunto y sea el conjunto  $P = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ , donde cada  $A_i$  es un subconjunto de  $A$  ( $A_i \subset A$  para  $1 \leq i \leq n$ ).  $P$  es una partición del conjunto  $A$  si cumple las siguientes condiciones:

- Para cada subconjunto  $A_i$  de  $A$  que pertenece a  $P$ , se cumple que  $A_i \neq \emptyset$ , es decir, que  $P$  es un conjunto de subconjuntos no vacíos de  $A$ .
- para cada subconjunto de  $A$  que pertenece a  $P$ , se cumple que  $\bigcap \{ A_i \mid A_i \subset A \} = \emptyset$ , es decir que todos los subconjuntos son disjuntos entre ellos.
- Se cumple que  $A = \bigcup \{ A_i \mid A_i \subset A \}$ , es decir, que la unión de todos los subconjuntos de  $A$  que pertenecen a  $P$  sea igual al conjunto  $A$ .

#### 1.6. PAR ORDENADO

Dados dos elementos  $a$  y  $b$ , se llama **par ordenado** a un par de elementos dados en orden un determinado, encerrados entre paréntesis  $(a,b)$ . Así  $(a,b) \neq (b,a)$ .

### 1.7 SECUENCIA Y TUPLA

En un conjunto, el orden en que se presentan sus elementos es irrelevante. Sin embargo una **secuencia** es un conjunto (finito o infinito) de elementos dados en un orden. Una **tupla** es un conjunto **finito ordenado** de elementos (las tuplas son un subconjunto de las secuencias).

Como habremos deducido, el par ordenado es un caso especial de tupla, que en ocasiones llamaremos *dupla*. Una 3-tupla lo llamamos *terna*, 4-tupla es una *cuádrupla*, 5- tupla es una *quíntupla*...

En general, una colección finita y ordenada de n elementos la llamamos n-tupla, o simplemente tupla. Una n-tupla se denota con n elementos separados por comas y todos ellos encerrados entre paréntesis.

Si dos tuplas tienen los mismos elementos, pero en distinto orden, entonces son tuplas distintas.

$$(a,b,c) \neq (a,c,b)$$

### 1.8. PRODUCTO CARTESIANO

Dados dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de dos conjuntos, denotado con  $A \times B$ , es otro conjunto formado por TODOS LOS PARES ORDENADOS POSIBLES en los que el primer elemento del par pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

Sean dos conjuntos  $A = \{1,2,3\}$  y  $B = \{a,b\}$ . Podemos representar el producto cartesiano de dos conjuntos de las siguientes maneras (para más de dos conjuntos se verán más adelante los diagramas de árbol, que son más legibles que las tablas o los diagramas de Venn):

- De manera formal, en extensión:



La cardinalidad del conjunto “producto cartesiano” se definirá posteriormente, cuando veamos el principio del producto.

## **1.9. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS**

Dados  $n$  conjuntos,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , una relación  $n$ -aria es un subconjunto del producto cartesiano de los  $n$  conjuntos ( $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ ). Si llamamos  $R$  a este conjunto

$$R \subset A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \text{ y en la otra notación } R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$$

O, visto de otra forma  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in R$ , donde  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  es una  $n$ -tupla de las que pertenecen al producto cartesiano  $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$

Si la relación es sobre dos conjuntos, se dice que es una *relación binaria* (también llamada **correspondencia**), y entonces decimos que la relación es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ , o lo que es lo mismo, un subconjunto de pares ordenados del producto cartesiano  $A \times B$ . Se denota por:

$$R \subset A \times B \text{ y en la otra notación } R \subseteq A \times B$$

O visto de otra forma, si  $a \in A$  y  $b \in B$ ,  $(a,b) \in R$ , que alternativamente también se denota con  $aRb$ .

La relación puede ser sobre el mismo conjunto, es decir, un subconjunto del producto cartesiano  $A \times A$ ; entonces se dice que es una *relación binaria sobre A* ( $R \subset A \times A$ ).

### **1.9.1. Propiedades de las relaciones binarias**

Supongamos la relación  $R$  y los conjuntos  $A, B$  y  $C$  (es fácil extrapolar todas estas propiedades a una relación sobre un conjunto universal):

- **Reflexiva.**- Dada una relación sobre  $A$ , es reflexiva si  $(a,a) \in R$  para todo valor  $a \in A$  (cada elemento está relacionado consigo mismo).
- **Irreflexiva.**- Dada una relación sobre  $A$ , es irreflexiva si  $(a,a) \notin R$  para todo valor de  $a \in A$  (ningún elemento está relacionado consigo mismo)
- **Simétrica.**- Si existe el par  $(a,b) \in R$ , entonces tiene que existir el par  $(b,a) \in R$  (si existe un par, existe su simétrico)
- **Asimétrica.**- Si existe el par  $(a,b) \in R$ , entonces el par  $(b,a) \notin R$  (el par simétrico no pertenece a la relación).
- **Antisimétrica.**- Si existe el par  $(a,b) \in R$  y existe el par  $(b,a) \in R$ , solo puede ser porque  $a = b$ .
- **Transitiva.**- Si existe el par  $(a,b) \in R$ , existe el par  $(b,c) \in R$ , entonces existe el par  $(a,c) \in R$ .
- **Intransitiva.**- Si existe el par  $(a,b) \in R$ , existe el par  $(b,c) \in R$ , entonces el par  $(a,c) \notin R$ .
- **Completud, conectada o elementos comparables.**- si existe el par  $(a,b) \in R$  o existe el par  $(b,a) \in R$  o ambos, para todos los elementos de cada conjunto ( $a \neq b$ ).

### 1.9.2. Relaciones de equivalencia

Se dice que una relación es de equivalencia cuando cumple las propiedades **reflexiva, simétrica y transitiva**.

Dada una relación de equivalencia en  $A \times B$ , se llama *clase de equivalencia* al conjunto de elementos de  $B$  que están relacionados con un elemento  $a \in A$ . Se denota

$$[a] = \{b \mid (a,b) \in R\}$$

Dada una relación de equivalencia en  $A \times B$ , se llama conjunto cociente de  $B$ , al conjunto de clases de equivalencia.

Dada una relación de equivalencia en  $A$ , el conjunto cociente de  $A$ , es una partición de  $A$ .

### 1.9.3. Relaciones de orden

Una relación es de orden parcial si cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Dada una relación sobre un conjunto  $A$ , esta ordena los elementos del conjunto  $A$ , y se dice parcialmente, porque no se exige que todos los elementos de  $A$  estén relacionados

Una relación es de orden total si, además de ser un orden parcial, cumple con la propiedad de completud, conectada o comparable (recordar que en esta existe el par  $(a,b) \in R$  o existe el par  $(b,a) \in R$  o ambos, para todos los elementos de cada conjunto).

Es fácil aplicar las relaciones de orden a cualquier otra relación binaria de dos conjuntos  $A$  y  $B$ .

### 1.9.4. Propiedades de la inclusión de conjuntos

La inclusión de conjuntos cumple con las siguientes propiedades:

- Reflexiva.-  $A \subset A$ . Obvia, por la segunda condición de inclusión.
- Antisimétrica.-  $A = B$  es cierto si y solo si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , por la segunda condición de inclusión
- Transitiva.- Si  $A \subset B$  y  $B \subset C$ , entonces  $A \subset C$ . Por la primera condición de inclusión. Por la segunda condición es trivial: si  $A = B$  y  $B = C$  entonces  $A=C$ .

Se dice que dos conjuntos son **comparables** si hay una *relación* de inclusión entre ellos, es decir, dados A y B dos conjuntos, son comparables si  $A \subset B$  o si  $B \subset A$ .

### Ejemplo 1.13

Volvamos al ejemplo de la academia, es decir Sea  $A = \{\text{alumnos de matemáticas de una academia}\}$ ,  $C = \{\text{animales de cuatro patas}\}$  y  $X$ , el conjunto universal de alumnos de la academia.

A y C no son comparables, ya que no hay animales de cuatro patas que asistan a clase, ni alumnos que tengan cuatro patas. Es decir, son elementos de distinta naturaleza.

Por otro lado, es obvio que A y X son comparables, pues  $A \subset X$  (son elementos de la misma naturaleza: alumnos)

--

Con estas propiedades, junto con la definición de pertenencia de un conjunto a otro conjunto, son las herramientas que utilizaremos para demostrar la inclusión de un conjunto en otro. Así:

- Para demostrar que  $A \subset B$ , hay que demostrar que todos los elementos de A pertenecen a B.
- Para demostrar que  $A \not\subset B$ , basta con demostrar que existe un elemento de A que no pertenece a B.
- Para demostrar que  $A = B$ , hay que demostrar la propiedad antisimétrica, esto es, que se cumple  $A \subset B$  (todos los elementos de A pertenecen a B) y  $B \subset A$  (todos los elementos de B pertenecen a A).

### **1.9.5. Representación gráfica de una relación sobre un conjunto**

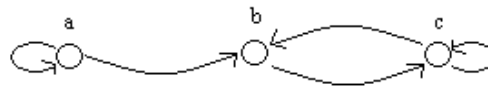
Para representar una relación sobre un conjunto A, lo haremos con un diagrama de círculos y arcos (denominado grafo y que definiremos en el capítulo 3). Cada círculo se etiqueta con el nombre de cada elementos del conjunto A y, para dos

elementos cualesquiera  $a$  y  $b$  de  $A$ , el par  $(a,b)$  se representa con una flecha que sale de  $a$  y entra en  $b$ .

Ejemplo 1.14:

Sea el conjunto  $A = \{a,b,c,d\}$  y sea  $R = \{(a,a),(a,b),(b,c)(c,b)(c,c)\}$  una relación cualquiera.

Una representación gráfica de esta relación sería



--

### 1.9. 6. Correspondencia entre conjuntos

Ya hemos dicho que una correspondencia es una relación binaria. Cuando se trabaja con conjuntos y representaciones con diagramas de Venn, y dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , es más común el nombre de *correspondencia del conjunto  $A$  en  $B$*  (recordar, es un subconjunto del producto cartesiano, donde el primer elemento pertenece a  $A$  y el segundo elemento pertenece a  $B$ ).

Al conjunto  $A$  se le llama conjunto inicial y al conjunto  $B$  conjunto final. En la representación gráfica con diagramas de Venn, el subconjunto de elementos de  $A$  que salen flechas se le llama conjunto **origen** y el subconjunto de elementos de  $B$  que llegan flechas, conjunto **imagen**.

Ejemplo 1.15

Dada la relación  $C = \{(1,a),(2,a),(2,b)\}$ , donde podemos ver que  $C$  está incluido en  $\{A \times B\}$ , su representación con diagramas de Venn sería

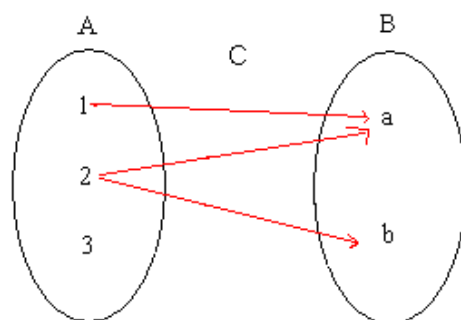


Figura 1.12. Diagramas de Venn con una correspondencia

Donde origen =  $\{1,2\}$  e imagen =  $\{a,b\}$

--

### 1.9.7. Correspondencia inversa de una dada

Dada una correspondencia del conjunto A en B, la inversa es de B en A, y es un conjunto de pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a B y el segundo elemento a A. se denota por  $C^{-1}$

Ejemplo 1.16

Si partimos de C en la representación anterior,  $C^{-1} = \{(a,1),(a,2),(b,2)\}$

--

### 1.10. APLICACIÓN ENTRE CONJUNTOS

Dada una correspondencia de A en B, esta será una aplicación de A en B si cada elemento del conjunto origen tiene una y solo una imagen (puede ser la misma).

Dados los diagramas de la figura 1.13, en el de la derecha la correspondencia inversa no es necesariamente una aplicación (el elemento a tiene dos imágenes).

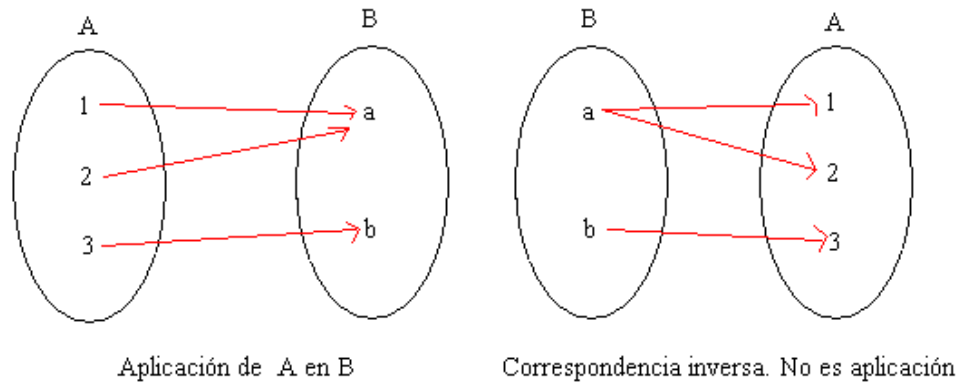


Figura 1.13. Diagramas de Venn con aplicaciones

Una aplicación es lo que conocemos como **función de una variable**. Aquí el conjunto origen es lo que se conoce como dominio de definición de la función, y el conjunto imagen es el recorrido de la función.

$$F(a) \subset A \times B$$

De manera general, una función de n variables es una aplicación, donde el conjunto origen está formado por la relación n-aria de los  $A_n$  conjuntos de variables, donde cada n-tupla  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  tiene una y solo una imagen (puede ser la misma). Si B es el conjunto imagen, formalmente, una función f de n variables es una relación (n+1)-aria

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \subset A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \times B$$

### 1.10.1. Aplicación suprayectiva

Son aplicaciones suprayectivas, sobreyectivas o exhaustivas, aquellas en las que cada elemento del conjunto imagen (destino) recibe alguna o mas flechas. El ejemplo anterior de aplicación de A en B es suprayectiva, pues todos los elementos de conjunto destino tienen una o más flechas. Esto ocurrirá siempre que  $|A| \geq |B|$ .

### 1.10.2. Aplicación inyectiva

Son aplicaciones inyectivas, aquellas en las que cada elemento del conjunto imagen recibe como máximo una flecha (una o ninguna). Esto ocurrirá siempre que  $|A| \leq |B|$ . Así podemos tener la siguiente aplicación.

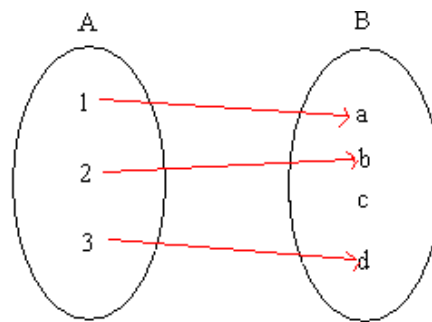


Figura 1.14. Diagrama de Venn para aplicación inyectiva

### 1.10.3. Aplicación biyectiva

Son aplicaciones biyectivas, aquellas en las que se da la circunstancia de que son suprayectivas e inyectivas a la vez; esto es, para cada elemento del conjunto origen le corresponde un elemento, y solo uno, del conjunto imagen y cada elemento del conjunto imagen recibe una y solo una flecha. Esto ocurre cuando  $|A| = |B|$

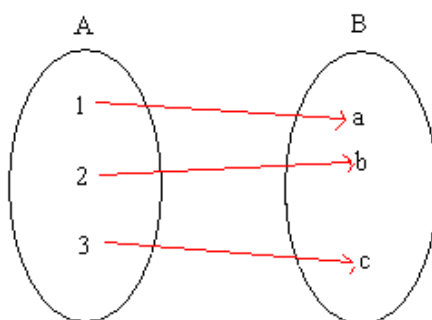


Figura 1.15. Diagrama de Venn para aplicación biyectiva

## 1.11. PRINCIPIO DE ADICION

Dados varios conjuntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , con un número finito de elementos y caracterizados porque **la intersección dos a dos es el conjunto vacío** (es decir, no

tienen ningún elemento en común), entonces se cumple que el **cardinal de la unión de estos conjuntos, es la suma de los cardinales de los conjuntos**; formalmente

Sean  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  donde  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\} / i \neq j$

y  $|A|$  el cardinal de  $A$  (recordar, es el número de elementos de  $A$ ).

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|$$

(Se demuestra por inducción)

En el capítulo siguiente veremos la cardinalidad de varios conjuntos no disjuntos (principio de inclusión y exclusión).

### **1.12. PRINCIPIO DEL PRODUCTO**

Dados varios conjuntos  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , con un número finito de elementos, decimos que la **cardinalidad del producto cartesiano** de todos ellos es igual al **producto de los cardinales de cada uno de los conjuntos**

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times |A_3| \times \dots \times |A_n|$$

(se demuestra por inducción)

Con este principio ya podemos calcular el número de pares ordenados (cardinal del producto cartesiano) para los conjuntos  $A$  y  $B$  definidos en el punto 1.8., de manera que si  $m=3$  y  $n=2$ ,  $|A \times B| = 6$  (que son justo los que podemos contar en la tabla de la figura 1.10).

Ejemplo 1.17:

Tenemos la terna  $(a, b, c)$  donde  $a \in B$ , un conjunto de 5 bolas de colores,  $b \in C$ , un conjunto de 3 cubos de colores y  $c \in L$ , un conjunto de 2 cilindros de colores. ¿Cuántas posibles ternas tendremos de la forma (bola, cubo, cilindro)?

Lo que hacemos es el producto cartesiano de los tres conjuntos, así

$$|bola|=5, |cubo|=4, |cilindro|=3,$$

Aplicando el principio del producto  $|bola \times cubo \times cilindro| = 5 \times 3 \times 2 = 30$

Tenemos 30 posibles ternas de la forma (bola,cubo,cilindro).

--

### 1.12.1. Diagrama de árbol para el producto cartesiano

El diagrama de árbol es una representación gráfica (un grafo) de todas las posibles k-tuplas que pertenecen al producto cartesiano de k conjuntos.

Para ello:

- 1.- Dibujamos un punto a la izquierda del diagrama. Será la raíz del árbol.
- 2.- Para cada uno de los elementos del primer conjunto (posición 1 de la k-tupla), sale un arco. Esto es lo que se llaman arcos de primera generación.
- 3.- Etiquetamos el extremo de cada arco con cada uno de los elementos del primer conjunto del producto cartesiano (luego veremos que se llaman vértices del grafo).
- 4.- Para cada uno de esos arcos de primera generación, saldrán también tantos arcos como elementos posibles del segundo conjunto. Estos se llaman arcos de segunda generación.
- 5.- Etiquetamos el extremo de cada arco de segunda generación, con cada uno de los elementos del segundo conjunto.
- ... Así sucesivamente hasta
- 6.- Para cada una de los arcos de generación (k-1), saldrán tantos arcos como elementos tenga el conjunto k del producto cartesiano. Estos son arcos de k generación.

7.- Etiquetamos el extremo de cada arco de  $k$  generación, con cada uno de los elementos del conjunto  $k$ .

El número de arcos de  $k$ -generación será el número de tuplas del producto cartesiano de los  $k$  conjuntos, y cada tupla estará representada por la secuencia de etiquetas desde la raíz hasta un extremo de  $k$ -generación.

Ejemplo 1.18:

Sigamos con el ejemplo de conjunto  $B$  de 5 bolas de colores,  $C$  un conjunto de 3 cubos de colores y  $L$  un conjunto de 2 cilindros de colores. Vamos a dibujar todas las ternas posibles para estos tres conjuntos, mediante el diagrama de árbol, es decir, dibujar todas las ternas que pertenecen al producto cartesiano  $B \times C \times L$ . en este caso  $k = 3$ :

- Vamos a llamar  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  a cada elemento de  $B$ ,  $C_1, C_2, C_3$  a cada elemento de  $C$  y  $L_1, L_2$  a los dos elementos de  $L$ .
- Para cada elemento de  $B$  sale un arco de primera generación. Cada uno de estos se etiqueta con cada uno de los elementos de  $B = \{ B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 \}$ .
- Para cada una de esos arcos de primera generación, saldrán también tantos arcos como elementos posibles del conjunto  $C$ . Cada una de estas se etiqueta con cada uno de los elementos de  $C = \{ C_1, C_2, C_3 \}$ .
- Para cada una de los arcos de segunda generación (las de  $C$ ), sale un arco por cada elemento de  $L$ , que se etiqueta con cada elemento de  $L = \{ L_1, L_2 \}$ .
- Cada terna se compondrá por la etiqueta de un arco de primera generación, seguida de una etiqueta de segunda generación y seguida de una etiqueta de tercera generación. Una terna de este ejemplo puede ser la  $(B_4, C_2, L_1)$ .

- El número de ternas posibles, será el número de arcos de tercera generación, es decir, 30 (que coincide con el cálculo realizado por el principio del producto).

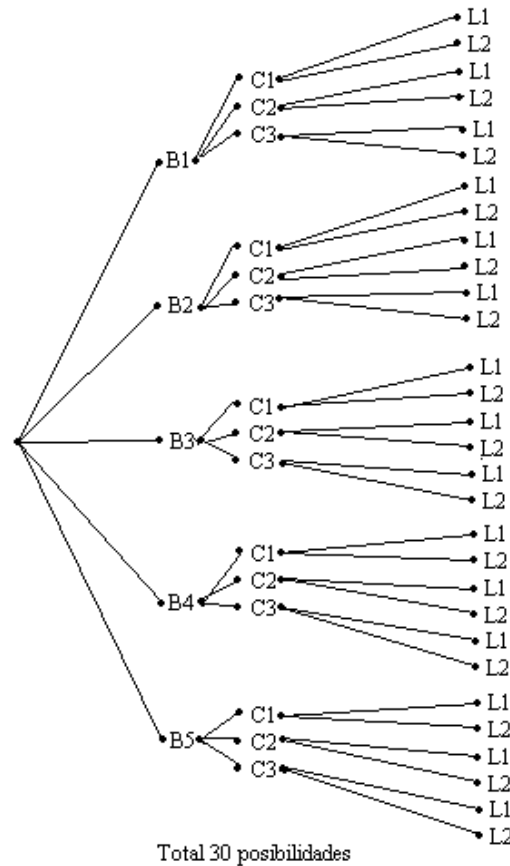


Figura 1.16. Diagrama de árbol para producto cartesiano

--

### 1.13 PRINCIPIO DE LA DISTRIBUCIÓN

Dados  $k$  elementos, tenemos que distribuirlos uniformemente entre  $m$  conjuntos. Entonces se da el caso de que:

- Si  $k < m$ , entonces habrá  $k$  conjuntos con 1 elemento y  $m-k$  conjuntos vacíos.
- Si  $k = m$ , entonces todos los conjuntos tendrán exactamente un elemento.
- Si  $2m > k > m$ , entonces habrá  $k-m$  conjuntos con 2 elementos y  $2m-k$  conjuntos tendrán un elemento.

...de manera general

- Si  $k = pm$  y  $p \in \{0,1,2,3,\dots,n\}$ , entonces todos los conjuntos tendrán  $p$  elementos
- Si  $pm > k > (p-1)m$  y  $p \in \{0,1,2,3,\dots,n\}$ , entonces habrá  $[k - (p-1)m]$  conjuntos tendrán  $p$  elementos y  $(pm - k)$  conjuntos tendrán  $p-1$  elementos.

(se demuestra por inducción)

#### Ejemplo 1.20

Distribuir diez elementos entre tres conjuntos: Así  $k = 10$ ,  $m = 3$ , y calculamos  $p$  para que  $pm > k > (p-1)m$ ; luego  $p = 4$

Así habrá  $[k-(p-1)m] = [10 - (3)3]=1$  conjunto con 4 elementos

y

$pm-k = 4(3)-10=2$  conjuntos con 3 elementos

--

### **1.14. CONJUNTOS INFINITOS**

Hasta ahora se ha considerado que los conjuntos tienen un número finito de elementos. En este conjunto hay un primero, un segundo, un tercero... hasta un número concreto. En un conjunto finito  $X$  se cumple una aplicación inyectiva entre  $X$  y el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números Naturales.

Dijimos que un conjunto lo podíamos definir en extensión delimitando entre llaves sus elementos, pero ¿y en un conjunto infinito? Podremos también utilizar esta notación, por ejemplo el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números Naturales lo podemos definir en extensión con puntos suspensivos:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$$

Como sabemos de cálculo, hay infinitos de orden superior a otros infinitos (es decir, infinitos más infinitos que otros). El conjunto infinito de orden inferior es el

**infinito contable o numerable** (también llamado infinito enumerable), y que además es el conjunto  $\mathbb{N}$  de los números Naturales.

Un conjunto *infinito*  $X$  es contable si existe una aplicación biyectiva entre  $X$  y el conjunto de los números Naturales.

Se nos puede plantear una duda ¿son contables los conjuntos finitos? Sabemos que una aplicación es biyectiva cuando es suprayectiva e inyectiva a la vez, por tanto, podemos decir que los conjuntos finitos son un subconjunto del conjunto infinito contable, y por lo tanto también son contables.

Decimos que un conjunto es **simplemente infinito, o no contable** si **no** hay una **aplicación biyectiva** de  $X$  al conjunto  $\mathbb{N}$ , de los número Naturales.

Consideremos un conjunto infinito contable  $A$ , que es un subconjunto propio de  $X$  (universal), que a su vez es infinito contable. Dado que por definición hay una aplicación biyectiva entre  $A$  y  $\mathbb{N}$ ,  $X$  es un conjunto infinito (son correspondencias sobre aplicaciones).

#### Ejemplo 1.21

Sea el conjunto  $X$  de todas las cadenas de zetas (los subíndices es para representar el número de zetas):

$$X = \{z_1, z_1z_2, z_1z_2z_3, z_1z_2z_3z_4, \dots, z_1z_2z_3z_4\dots z_n \text{ tal que } n \in \mathbb{N} \}$$

Podemos demostrar que existe una aplicación biyectiva de  $X$  en  $\mathbb{N}$ , de manera que el conjunto de todas las cadenas de zetas será infinito contable (cadena de 1 zeta, cadena de 2 zetas, cadena de 3 zetas...., cadena de  $n$  zetas).

--

#### Ejemplo 1.22

¿Es el conjunto potencia de  $X$  (infinito contable) también infinito contable?

Por la última definición sabemos que no: tendremos un número infinito contable de subconjuntos infinitos contables, lo que es una aplicación de  $X$  sobre  $\mathbb{N}$ , pero no biyectiva (a cada subconjunto del conjunto imagen, le llegarán un número infinito contable de subconjuntos del conjunto origen).

Cojamos un caso particular, sea el conjunto  $X = \{ \text{cadenas formadas por 0 y 1, el cual será un conjunto infinito aunque contable; definido en extensión} \}$

$$X = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$$

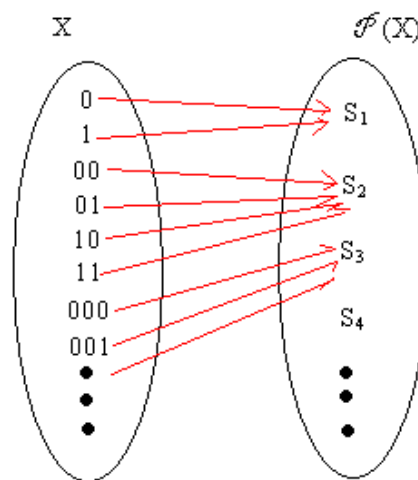


Figura 1.17. Aplicación de  $\mathbb{N}$  sobre el conjunto potencia

Ahora demostremos que  $\mathcal{P}(X)$  no es contable. Denotemos  $S_i$  como el subconjunto de cardinalidad  $i$ . Como vemos en el diagrama, por cada subconjunto de cardinalidad  $i$  tenemos varios elementos de  $X$ , por lo tanto no es una correspondencia biyectiva.

--

Dado que un conjunto infinito contable es una aplicación biyectiva sobre  $\mathbb{N}$ , podemos demostrar que cualquier operación entre conjuntos infinitos contables es otro conjunto infinito contable.

Dado que un conjunto finito (contable) es un subconjunto de los conjuntos infinitos contables, y las operaciones entre conjuntos dan como resultado otro conjunto, resulta que podemos generalizar, para los segundos, las operaciones y

propiedades definidas para los primeros, excepto el concepto de cardinalidad que cambia, ya no es un número concreto, aunque sea infinito contable (con excepción del conjunto potencia de un conjunto infinito contable, que hemos visto que era infinito).

--

## CAPÍTULO 2.- COMBINATORIA

### 2.1. VARIACIONES CON REPETICIÓN

Retomemos el ejemplo de las correspondencias del capítulo anterior entre dos conjuntos  $A = \{1,2,3\}$  y  $B = \{a,b\}$ . Ahora queremos averiguar el número de aplicaciones que podemos tener entre estos dos conjuntos. En el primer ejemplo de aplicación, esta sería el conjunto  $\{(1,a) (2,a) (3,b)\}$ .

Esta representación en pares la podemos reducir: si suponemos que el conjunto origen va a ser siempre una serie de números consecutivos naturales ordenados, podemos representar

$$\{(1,a) (2,a) (3,b)\} \equiv (a,a,b)$$

así el orden de los elementos del conjunto origen nos está diciendo de manera implícita el orden de la tupla resultante. De esta forma, los podemos obviar.

Como podemos ver, vamos a formar tuplas de tres elementos, pero ¿Cuántas aplicaciones podemos tener para estos dos conjuntos? De forma empírica podríamos encontrar, para nuestro ejemplo (luego lo haremos metódicamente con el diagrama de árbol que se explica más abajo), las siguientes tuplas:

$$(a,a,a) (a,a,b) (a,b,a) (a,b,b) (b,a,a), (b,a,b) (b,b,a) (b,b,b)$$

En términos formales, cada tupla es una *variación con repetición* de  $m$  elementos (2) tomados de  $n$  en  $n$  (de 3 en 3). Se dice con repetición porque los  $m$  elementos pueden estar repetidos en varias posiciones de la tupla.

### 2.1.1. Calculo de las variaciones con repetición

- En el primer elemento de la tupla podremos tener cualquiera de los elementos del conjunto imagen.
- En el segundo elemento podemos tener todos los elementos del conjunto imagen.
- En la tercera igual;

Así, el resultado resulta ser exponencial

(2 elementos de la primera posición)x(2 elementos de la segunda)x(2 elementos de la tercera)=  $2^3 = 8$

Generalizando, variaciones con repetición de  $m$  elementos, tomados de  $n$  en  $n$ , se calcula aplicando

$$VR(m,n) = m^n$$

### 2.1.2. Diagrama de árbol para variaciones con repetición

Para representar gráficamente, y así tener una visión del número de variaciones, se puede utilizar el diagrama de árbol. La forma de encontrar el número total de tuplas (el número total de aplicaciones posibles), dado un conjunto imagen, con  $n$  elementos y para  $k$ -tuplas ( $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$ ), se realiza de la siguiente forma:

1.- Dibujamos un punto a la izquierda del diagrama

2.- Desde este punto, y para cada uno de los  $n$  elementos del conjunto imagen, sale un arco. Esto es lo que se llaman arcos de primera generación. Etiquetamos cada extremo con cada uno de los elementos.

3.- Para cada una de esos arcos de primera generación, saldrá también un arco por cada uno de los  $n$  elementos del conjunto imagen, con los que se etiquetarán. Estos arcos se llaman de segunda generación.

...

4.- Para cada uno de los arcos de  $k-1$  generación, sale un arco por cada elemento del conjunto imagen. A estos arcos se las llama de  $k$ -generación.

El número de arcos de  $k$ -generación será el número total de aplicaciones posibles de estos  $n$  elementos tomados de  $k$  en  $k$ , con repetición.

Así, para el ejemplo anterior en el que  $m = 2$  (a y b) y  $n=3$  (3-tupla), el diagrama de árbol sería:

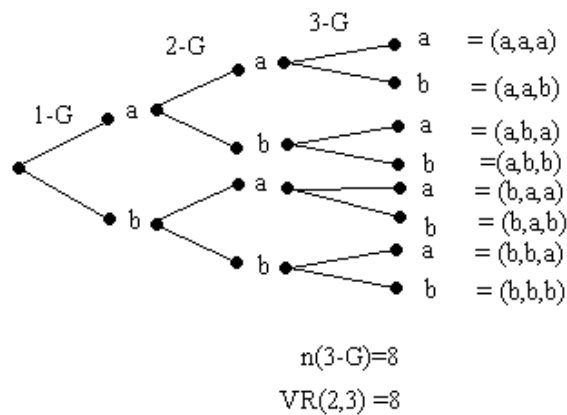


Figura 2.1. Diagrama de árbol para variaciones con repetición

## 2.2. VARIACIONES SIN REPETICION

Sean dos conjuntos  $A= \{1,2,3\}$  y  $B = \{a,b,c,d\}$ . Ahora lo que queremos calcular son el número de aplicaciones *inyectivas* (esto es, aquellas que el conjunto final solo puede recibir a lo sumo una flecha o ninguna). De aquí se deduce que el conjunto origen tiene los mismos o menos elementos que el imagen.

$$|A| \leq |B|$$

Para los conjuntos anteriores, un ejemplo de aplicación inyectiva sería  $\{(1,a) (2,c) (3,d)\}$ . Aquí también vamos a considerar implícito el conjunto origen, con lo que nos quedaría la tupla  $(a,c,d)$  que representa a una de las posibles aplicaciones inyectivas para esos dos conjuntos.

A partir de la definición de “inyectiva” deducimos que cada elemento sólo puede aparecer en la tupla, una o ninguna vez (de ahí que sean sin repetición).

Las aplicaciones inyectivas para estos dos conjuntos son las siguientes tuplas:

$(a,b,c) (a,b,d) (a,c,d) (a,d,c) (b,a,c) (b,a,d) (b,c,d)(b,d,a) (b,d,c)$

Formalmente, se dice que cada una de esas tuplas es una *variación sin repetición* de  $m$  elementos  $(a, b, c, d)$  tomados de  $n$  en  $n$  (de tres en tres), de manera que un elemento sólo puede aparecer una o ninguna vez en la tupla. Cada una de estas, a su vez, es distinta si alguna de las posiciones tiene elementos distintos o bien lo es el orden en que están (lo que es la definición de tupla).

### 2.2.1. Diagrama de árbol para variaciones sin repetición

Dado un conjunto imagen, con  $n$  elementos y para  $k$ -tuplas, se realiza de la siguiente forma:

- 1.- Dibujamos un punto a la izquierda del diagrama.
- 2.- Para cada uno de los elementos del conjunto imagen trazamos un arco. En este caso serán tantos arcos como elementos posibles del conjunto imagen. Esto es lo que se llaman arcos de primera generación.
- 3.- Etiquetamos cada arco con cada uno de los elementos.
- 4.- Desde cada arco de primera generación, trazamos tantos arcos como elementos del conjunto imagen excepto el de la etiqueta del arco de primera generación del que proceda.

5.- Tendremos m-1 elementos posibles (excluido del que proceden) que etiquetan m-1 arcos de segunda generación.

.....

6.- Desde cada arco de k-1 generación, trazamos tantos arcos como elementos resulte de eliminar del conjunto imagen los elementos que etiquetan de los arcos precedentes (recorriéndolos hacia atrás). Si hemos considerado ya los k-1 elementos como presentes, estos no pueden ser etiquetas de líneas de k generación.

7.-Tendremos m-k+1 elementos posibles, que etiquetarán m-k+1 arcos de k generación.

El número total de arcos de k-generación será el número total de aplicaciones posibles de estos m elementos tomados de k en k, sin repetición.

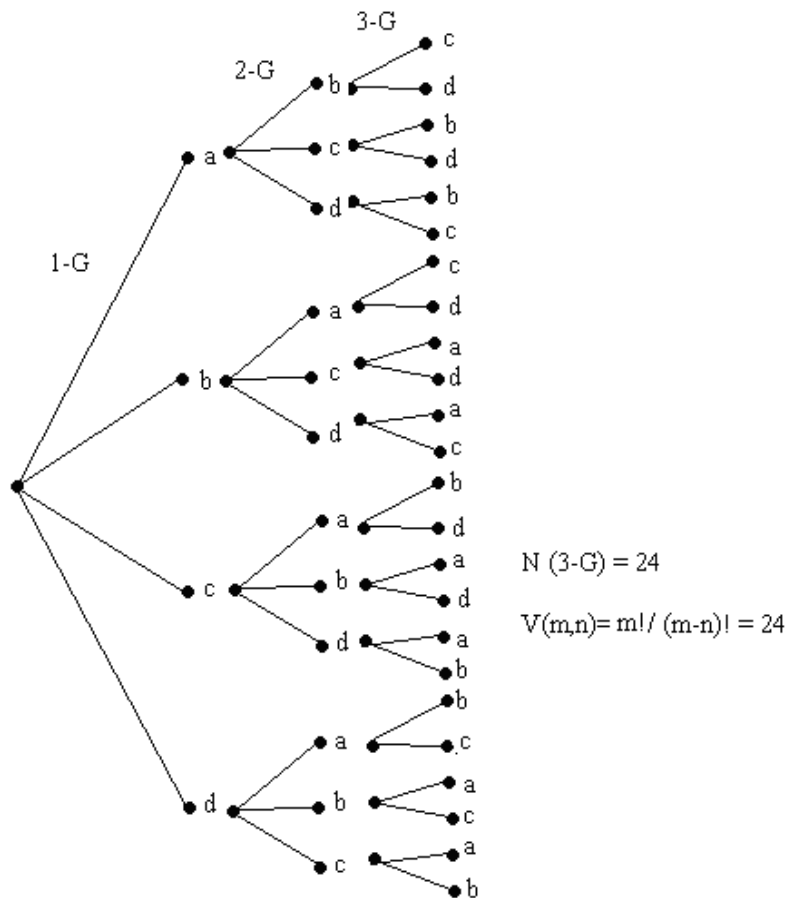


Figura 2.2. Diagrama de árbol para variaciones sin repetición

### 2.2.2. Factorial de un número

Dado un número natural  $m$ , el factorial de  $m$ , denotado por  $m!$ , se define por el producto de  $m$  por cada uno de los número naturales consecutivamente desde  $m-1$  hasta 1 (los que le preceden)

$$m! = m(m-1)!(m-1)(m-2)! = m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1$$

Caso particular es el factorial de cero

$$0! = 1$$

### 2.2.3. Cálculo de las variaciones sin repetición

Del diagrama de árbol, podemos deducir que el número de variaciones sin repetición será la suma de los arcos de primera generación, por la suma de los arcos de segunda generación y así hasta la suma de los arcos de  $k$ -ésima generación.

$$V(m,k) = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)$$

Este calculo puede ser muy tedioso, así que lo vamos a multiplicar y a dividir por  $(m-k)!$ , la ecuación nos queda

$$V(m,k) = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1) (m-k)! / (m-k)!$$

Aplicando el factorial, el numerador se convierte en  $m!$ , así la ecuación queda

$$V(m,k) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Se tiene que cumplir la condición de que  $m \geq k$ , ya que no existe el factorial de un número negativo (esto es inmediato por la definición de aplicación inyectiva).

No obstante, y debido a que las variaciones **son un caso particular del producto cartesiano**, estas se pueden hallar mediante el principio del producto.

### 2.3. PERMUTACIONES

En términos de la teoría de conjuntos, lo que queremos calcular es el número de aplicaciones biyectivas. Como ya hemos dicho, estas son suprayectivas e inyectivas a la vez, y se caracterizan porque el conjunto origen y el conjunto imagen tienen el mismo número de elementos (esto se deduce por el hecho de que los elementos del conjunto imagen sólo pueden tener una y solo una flecha).

Sea un conjunto  $A=\{1,2,3\dots n\}$ , Si se hace una aplicación biyectiva de  $A$  sobre  $A$ , lo que estamos hallando es *una de las posibles ordenaciones de los  $n$  elementos de  $A$* . El número de permutaciones se denota por  $P(n)$ , y son el número de ordenaciones posibles de  $n$  elementos.

Un ejemplo: Sea el conjunto  $C=\{1,2,3\}$ , una de las aplicaciones biyectivas sería el conjunto de pares  $\{(1,3) (2,2) (3,1)\}$ . Como en casos anteriores, vamos a considerar implícito el conjunto origen (al ser una aplicación biyectiva de  $A$  sobre  $A$ , el conjunto origen es implícito), con lo que nos quedaría la tupla  $(3,2,1)$ .

El total de las aplicaciones biyectivas de  $A$  sobre  $A$  serían:

$$(1,2,3)(1,3,2) (2,1,3) (2,3,1) (3,2,1) (3,1,2)$$

Observando el resultado, vemos que ningún elemento se repite en cada tupla y que difieren en el orden de sus elementos. Como hemos dicho las aplicaciones biyectivas son un caso particular de las inyectivas, así **una permutación es un caso particular de las variaciones sin repetición.**

#### 2.3.1. Cálculo de las permutaciones

Para calcular las permutaciones, vemos que son  $m$  elementos  $(1,2,3)$  tomados de  $m$  en  $m$  (de tres en tres), así aplicando la ecuación de las variaciones sin repetición

$$V(m,m) = P(m) = m! / (m-m)! \quad \text{el denominador es } 0 \text{ y su factorial } 1, \text{ luego}$$

$$P(m) = m!$$

Para su cálculo mediante el diagrama de árbol se hará por el mismo procedimiento que para las variaciones sin repetición.

## **2.4. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN**

Para entender estas permutaciones, primero pondremos un ejemplo; supongamos un conjunto de 4 personas, formado por 2 mujeres y 2 hombres

Si ponemos estas personas en fila, ¿Cuántas posibles ordenaciones posibles tendríamos de las 4 personas? En este caso vamos a definir cada persona como un elemento distinto, así queda el conjunto  $\text{Personas} = \{m1, m2, h1, h2\}$ .

Calculamos las permutaciones sin repetición

$$P(4) = 4! = 24 \text{ permutaciones distintas}$$

Si hacemos el diagrama de árbol para permutaciones sin repetición, vemos que nos quedarían las siguientes (cuatro personas distintas en fila):

(m1,m2,h1,h2) (m1,m2,h2,h1) (m1,h1,m2,h2) (m1,h1,h2,m2) (m1,h2,m2,h1)  
 (m1,h2,h1,m2) (m2,m1,h1,h2) (m2,m1,h2,h1) (m2,h1,m1,h2) (m2,h1,h2,m1)  
 (m2,h2,m1,h1) (m2,h2,h1,m1) (h1,m1,m2,h2) (h1,m1,h2,m2) (h1,m2,m1,h2)  
 (h1,m2,h2,m1) (h1,h2,m1,m2) (h1,h2,m2,m1) (h2,m1,m2,h1) (h2,m1,h1,m2)  
 (h2,m2,m1,h1) (h2,m2,h1,m1) (h2,h1,m1,m2) (h2,h1,m2,m1)

Ahora nos hacemos la siguiente pregunta ¿Cuántas posibles ordenaciones tendríamos de hombres y mujeres en la fila?

Para llegar a la solución, lo que hacemos es determinar *clases de elementos* del mismo tipo: en nuestro ejemplo hombres y mujeres.

La clase hombres tiene dos elementos, y el número de permutaciones posibles de estos dos elementos es de  $2! = 2$  y son las duplas  $(h_1, h_2)$   $(h_2, h_1)$ . En el caso de las mujeres las permutaciones posibles de sus dos elementos es también 2 y sus duplas son  $(m_1, m_2)$   $(m_2, m_1)$ .

Lo importante aquí son las clases de elementos. En cada una de ellas, sus elementos no se pueden distinguir los unos de los otros (un hombre no se distingue de otro). En las tuplas, esto se consigue por la eliminación de los subíndices, lo que resulta en tuplas iguales:  $(h, h)$  para hombres y  $(m, m)$  para mujeres.

Para identificarlas vamos a tomar primero la clase hombres:

- Tomemos la primera permutación  $(m_1, m_2, h_1, h_2)$ .
- Los hombres están en las posiciones finales y las mujeres en las iniciales. Si sólo tenemos en cuenta la clase hombres, la forma de la tupla será  $(m_1, m_2, h, h)$ .
- Si revisamos las tuplas, y las comparamos con la anterior, resulta que, si eliminamos los subíndices de los hombres.  $(m_1, m_2, h_1, h_2)$  será igual que  $(m_1, m_2, h_2, h_1)$
- Si cogemos la siguiente tupla  $(m_1, h_1, m_2, h_2)$ , y se convierte en  $(m_1, h, m_2, h)$ , también tenemos dos tuplas iguales  $(m_2, h_1, m_1, h_2)$  y  $(m_2, h_2, m_1, h_2)$  si eliminamos los subíndices de los hombres.
- Procedemos así hasta que no queden grupos de tuplas.

El resultado es el siguiente (tachamos las iguales)

$(m_1, m_2, h, h)$   ~~$(m_1, m_2, h, h)$~~   $(m_1, h, m_2, h)$   $(m_1, h, h, m_2)$   ~~$(m_1, h, m_2, h)$~~   ~~$(m_1, h, h, m_2)$~~   
 $(m_2, m_1, h, h)$   ~~$(m_2, m_1, h, h)$~~   $(m_2, h, m_1, h)$   $(m_2, h, h, m_1)$   ~~$(m_2, h, m_1, h)$~~   ~~$(m_2, h, h, m_1)$~~   
 $(h, m_1, m_2, h)$   $(h, m_1, h, m_2)$   $(h, m_2, m_1, h)$   $(h, m_2, h, m_1)$   $(h, h, m_1, m_2)$   $(h, h, m_2, m_1)$   
 ~~$(h, m_1, m_2, h)$~~   ~~$(h, m_1, h, m_2)$~~   ~~$(h, m_2, m_1, h)$~~   ~~$(h, m_2, h, m_1)$~~   ~~$(h, h, m_1, m_2)$~~   ~~$(h, h, m_2, m_1)$~~

Sobre este conjunto de tuplas resultante, aplicamos el mismo procedimiento ahora a las mujeres: tomamos la primera permutación,  $(m_1, m_2, h, h)$  y le eliminamos los subíndices, resulta que la tupla  $(m_2, m_1, h, h)$  es igual a la anterior. Procedemos así hasta que no queden grupos de tuplas.

El resultado es el siguiente (tachamos las iguales):

$(m, m, h, h)$   $(m, h, m, h)$   $(m, h, h, m)$   ~~$(m, m, h, h)$~~   ~~$(m, h, m, h)$~~   ~~$(m, h, h, m)$~~   $(h, m, m, h)$   $(h, m, h, m)$   
 ~~$(h, m, m, h)$~~   ~~$(h, m, h, m)$~~   $(h, h, m, m)$   ~~$(h, h, m, m)$~~

Eliminando las tuplas repetidas, nos queda el conjunto:

$(m, m, h, h)$   $(m, h, m, h)$   $(m, h, h, m)$   $(h, m, m, h)$   $(h, m, h, m)$   $(h, m, m, h)$

Un segundo ejemplo: Supongamos ahora que tenemos una fila con 5 personas de las cuales son 3 mujeres y 2 hombres. El número de permutaciones (ordenaciones) de las 5 personas será de  $5! = 120$  5-tuplas. Si cogemos los elementos de la clase mujeres, resulta que tendremos  $3! = 6$  permutaciones:

$(m_1, m_2, m_3)$   $(m_1, m_3, m_2)$   $(m_2, m_1, m_3)$   $(m_2, m_3, m_1)$   $(m_3, m_1, m_2)$   $(m_3, m_2, m_1)$

Ahora cogemos una 5-tupla, por ejemplo  $(m_1, m_2, h_1, m_3, h_2)$ , le quitamos los subíndices a las mujeres y buscamos todas las que son de la forma  $(m, m, h_1, m, h_2)$ . Efectivamente, son seis que corresponden a las seis ternas de la clase mujeres:

$(m_1, m_2, h_1, m_3, h_2)$   $(m_1, m_3, h_1, m_2, h_2)$   $(m_2, m_1, h_1, m_3, h_2)$   
 $(m_2, m_3, h_1, m_1, h_2)$   $(m_3, m_1, h_1, m_2, h_2)$   $(m_3, m_2, h_1, m_1, h_2)$

Si eliminamos los subíndices de las mujeres, resultará que estas 6 5-tuplas son iguales. Si continuamos con todas las tuplas, cada 6 5-tuplas originales, se produce una permutación con repetición de elementos de la clase mujeres.

De la misma forma, lo haríamos con los hombres. Si cogemos los elementos de la clase hombres, resulta que tenemos  $2! = 2$  tuplas distintas

$$(h1,h2) (h2,h1)$$

Ahora cogemos una 5-tupla, por ejemplo  $(m1,m2,h1,m3,h2)$ , le quitamos los subíndices a los hombres y buscamos todas las que son de la forma  $(m1,m2,h,m3,h)$ . Efectivamente son dos, que corresponden a los dos pares de la clase hombres:

$$(m1,m2,h1,m3,h2) (m1,m2,h2,m3,h1)$$

Si eliminamos los subíndices de los hombres, resultará que estas dos 5-tuplas son iguales. Si continuamos con todas las 5-tuplas, cada 2 originales, se produce una permutación con repetición de elementos de la clase hombres.

Si eliminamos todos los subíndices a cada grupo de permutaciones, resulta que tenemos 10 permutaciones con repetición de 5 elementos con grupos de 3 y 2:

$$(m,m,h,m,h) (m,m,m,h,h) (m,h,m,m,h) (h,m,m,m,h) (h,m,m,h,m) \\ (h,m,h,m,m) (h,h,m,m,m) (m,m,h,h,m) (m,h,h,m,m) (m,m,m,h,h)$$

--

De manera general, este proceso se realiza para cada una de las clases de elementos que se puedan tener en el conjunto original.

Para un número de elementos grande, utilizar este método para calcular el número de permutaciones resultantes puede ser un trabajo tedioso. Sin embargo nos ofrece una idea intuitiva para calcularlas de manera analítica. Se puede afirmar que el número de permutaciones con repetición (permutaciones con clases de elementos) es el número de permutaciones, tomando todos los elementos distintos, dividido por el número de permutaciones de los elementos de cada clase.

Formalmente

$$PR_n^{a,b,c,\dots} = \frac{P(n)}{P(a).P(b).P(c),\dots} = \frac{n!}{a! b! c!}$$

Donde  $n$  es el número total de elementos y  $a, b, c$  el número de elementos que son de la misma categoría. Se tiene que cumplir que  $a+b+c+\dots=n$

Como resultado del ejemplo de la fila de 2 hombres y 2 mujeres, se confirma que el número de permutaciones es 6 :

$$PR_4^{2,2} = \frac{P(4)}{P(2) P(2)} = \frac{4!}{2! 2!} = 6$$

y como resultado del ejemplo de la fila de 3 mujeres y 2 hombres, se confirma que el número de permutaciones es 10:

$$PR_5^{3,2} = \frac{P(5)}{P(3) P(2)} = \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

## **2.5. COMBINACIONES SIN REPETICIÓN**

Hasta ahora hemos estado viendo aplicaciones entre conjuntos y sus posibles resultados, creando una relación de orden (tuplas). Ahora lo que nos interesa es calcular el número de subconjuntos de un conjunto dado. Para ello vamos a necesitar el conjunto de las partes de un conjunto  $\mathcal{P}(X)$  antes vista.

Utilicemos un ejemplo. Sea el conjunto  $A = \{a,b,c\}$ . Los subconjuntos posibles son:

- Subconjunto de cardinalidad 0.- Conjunto vacío
- Subconjuntos de cardinalidad 1.-  $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
- Subconjuntos de cardinalidad 2.-  $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$
- Subconjuntos de cardinalidad 3.- Conjunto  $A$  .-  $\{a,b,c\}$

Si los contamos, resulta que  $|\mathcal{P}(A)|=8$ , lo que coincide con

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$$

Para las combinaciones, lo que nos interesan son los subconjuntos de cardinalidad  $i$ , con  $0 < i < |A|$ . Así Para el conjunto  $A$ , que tiene cardinalidad 3, tiene 3 posibles combinaciones de dos elementos ( $n=2$ ). Una combinación es cada uno de los elementos del subconjunto de cardinalidad 2.

Generalizando, dado un conjunto de cardinalidad  $m$ , queremos calcular el número subconjuntos de cardinalidad  $n$ , donde  $m \geq n$ . Es decir, calcular el número de combinaciones de los  $m$  elementos del conjunto tomados de  $n$  en  $n$ , Entre los elementos de estos subconjuntos no se ha definido ninguna relación de orden, luego

$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

### 2.5.1 Cálculo de combinaciones sin repetición

Supongamos el ejemplo anterior, en el que solo conocemos  $A=\{a,b,c\}$ . Sabemos que el número combinaciones posibles de  $A$ , puestos de dos en dos (subconjuntos de cardinalidad 2) son  $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ . Ahora queremos calcular de manera analítica el número de combinaciones.

Una primera aproximación podría ser calcular las variaciones de 3 elementos tomados de 2 en dos; el resultado de estas variaciones es:

$$(a,b) (a,c) (b,a) (b,c) (c,a) (c,b), \quad V(3,2) = 3! / (3-2)! = 6$$

Recordar que las variaciones son pares ordenados y las combinaciones no tienen orden. Vamos a considerar clases de pares, de manera que, si un par tiene los mismos elementos que un subconjunto de cardinalidad  $n$ , entonces esos pares pertenecen a la misma clase, y por lo tanto sus elementos al mismo subconjunto.

Para el subconjunto  $\{a,b\}$ , las tuplas  $(a,b) (b,a)$  serían de la misma clase

Para el subconjunto  $\{a,c\}$  las tuplas  $(a,c) (c,a)$  serían de la misma clase

Para el subconjunto  $\{b,c\}$  las tuplas  $(b,c)$   $(c,b)$  serían de la misma clase

Pongamos otro ejemplo. Sea  $A=\{a,b,c,d\}$  y queremos saber el número de subconjuntos de cardinalidad 3.

El número de variaciones será  $V(4,3)=4!/(4-3)! = 24$

Las ternas  $(a,b,c)$   $(a,c,b)$   $(b,a,c)$   $(b,c,a)$   $(c,a,b)$   $(c,b,a)$  son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto  $\{a,b,c\}$

Las ternas  $(a,b,d)$   $(a,d,b)$   $(b,a,d)$   $(b,d,a)$   $(d,a,b)$   $(d,b,a)$  son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto  $\{a,b,d\}$

Las ternas  $(b,c,d)$   $(b,d,c)$   $(c,b,d)$   $(c,d,b)$   $(d,b,c)$   $(d,c,b)$  son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto  $\{b,c,d\}$

Las ternas  $(a,c,d)$   $(a,d,c)$   $(c,a,d)$   $(c,d,a)$   $(d,a,c)$   $(d,c,a)$  son de la misma clase y sus elementos pertenecen al subconjunto  $\{a,c,d\}$

De donde sale que hay 4 subconjuntos de cardinalidad 3.

De estos ejemplos deducimos (formalmente se demuestra por inducción) que **todos los subconjuntos tienen el mismo número de posibles ordenaciones**, que corresponden al número de permutaciones de los  $n$  elementos (recordar que son subconjuntos de cardinalidad  $n$ ).

En nuestros dos ejemplos, el número de permutaciones de los elementos del subconjunto, en el primer caso son  $2!=2$  pares, y en el segundo ejemplo  $3!=6$  ternas.

Las  $n$ -tuplas con los mismos elementos se consideran iguales; se eliminan las que sobren, y esto es equivalente a dividir las variaciones de los  $m$  elementos del conjunto tomadas de  $n$  en  $n$  (subconjuntos de cardinalidad  $n$  para un conjunto de cardinalidad  $m$ ) por el número de permutaciones de los elementos del subconjunto.

Así en nuestro ejemplos, en el primero son  $C(3,2)=3$  subconjuntos y en el segundo  $C(4,3)=4$  subconjuntos (que coincide con la cantidad obtenida anteriormente)

Formalmente, para un conjunto de  $m$  elementos, el conjunto de combinaciones de orden  $n$  (el número de subconjuntos con  $n$  elementos) será:

$$C(m,n) = \frac{V(m,n)}{n!}$$

Si hacemos la sustitución, nos queda finalmente

$$C(m,n) = \frac{m!}{\frac{(m-n)!}{n!}} = \frac{m!}{n! (m-n)!}$$

El número de combinaciones se denota por  $C(m,n)$ , o más comunmente por  $\binom{m}{n}$ , número combinatorio (notación de Euler) y se lee como el número de combinaciones de  $m$  elementos tomados de  $n$  en  $n$ .

Con esta ecuación hemos establecido la base para completar el cálculo del cardinal del conjunto potencia de uno dado, este último de cardinalidad finita (visto en el punto 1.4.2)

## **2.6. COMBINACIONES CON REPETICIÓN**

Este es un típico problema de clasificación. Pongamos un ejemplo: Tenemos un conjunto finito de personas, por ejemplo 10; si tenemos 3 filas distintas ¿de cuantas maneras distintas se pueden distribuir las filas? En la siguiente tabla se da la solución, donde F1 es fila 1, F2 es fila 2 y F3 es fila 3

F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
0	0	10	1	0	9	2	1	7	3	3	4	4	6	0	6	4	0
0	1	9	1	1	8	2	2	6	3	4	3	5	0	5	7	0	3
0	2	8	1	2	7	2	3	5	3	5	2	5	1	4	7	1	2
0	3	7	1	3	6	2	4	4	3	6	1	5	2	3	7	2	1
0	4	6	1	4	5	2	5	3	3	7	0	5	3	2	7	3	0
0	5	5	1	5	4	2	6	2	4	0	6	5	4	1	8	0	2
0	6	4	1	6	3	2	7	1	4	1	5	5	5	0	8	1	1
0	7	3	1	7	2	2	8	0	4	2	4	6	0	4	8	2	0
0	8	2	1	8	1	3	0	7	4	3	3	6	1	3	9	0	1
0	9	1	1	9	0	3	1	6	4	4	2	6	2	2	9	1	0
0	10	0	2	0	8	3	2	5	4	5	1	6	3	1	10	0	0

Formalmente, sea un conjunto  $A$  finito y no vacío de  $n$  elementos  $|A|=n$  (en nuestro ejemplo son las 3 filas). Sea  $k$  un número entero positivo (en nuestro caso el número de personas), donde  $k \geq n$ . Cada uno de los elementos del conjunto define  $n$  clases (3 categorías de filas); cada combinación con repetición estará compuesta por  $x_1$  elementos de  $k$  para la categoría 1 (entre cero y  $k$  elementos),  $x_2$  elementos de  $k$  para la categoría 2 (entre cero y  $k$  elementos), ...,  $x_n$  elementos de  $k$  para la categoría  $n$  (entre cero y  $k$  elementos), donde  $x_1+x_2+\dots+x_n=k$

Como caso particular de las combinaciones con repetición, sería aquella en la que se distribuyen uniformemente los elementos en las filas, que es la calculada mediante el principio de la distribución de conjuntos.

### 2.6.1. Cálculo de las combinaciones con repetición

Dado que los elementos son iguales ¿Cómo identificamos los elementos en cada una de las  $n$  categorías de  $A$ ? Lo que hacemos es construir una cadena de dígitos de la siguiente forma:

- Tantos 1,s como número de elementos  $x_1$   
seguido de 0 como marca de categoría 1

- Tantos 1,s como números de elementos  $x_2$
- seguido de 0 como marca de categoría 2
- ....
- Tantos 1,s como número de elementos  $x_n$ .  
(no hace falta marca de fin de categoría n; está implícita ya que es la última).

Así, en la cadena resultante, tendremos k unos más n-1 ceros (marca de primera, de segunda,..., de n-1 categoría). Una vez que hemos traducido a una cadena de 0,s y 1,s, el problema se reduce a encontrar el número de combinaciones posibles de k+n-1 elementos tomados de k en k

En nuestro ejemplo, la traducción en una cadena de 0,s y 1,s para una posible combinación, Fila1=3 fila2=3 fila 3=4, resultaría en una cadena de k+n-1 elementos

111011101111

Luego, la ecuación para el cálculo de combinaciones con repetición quedaría

$$CR(n,k) = C(k+n-1,k) = \binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k! [(k+n-1)-k]!} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Continuando con nuestro ejemplo, de 3 filas y 10 personas, resulta que los elementos de la tabla anterior son:

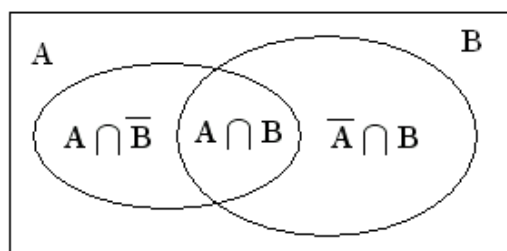
$$CR(3,10) = C(10+3-1,10) = \binom{10+3-1}{10} = \frac{12!}{10! (12-10)!} = 66$$

## 2.7. PRINCIPIO DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN (CONJUNTOS)

Para terminar este capítulo, y sabiendo las combinaciones, ya podemos explicar este principio de la teoría de conjuntos. Este nos dice que, dados unos conjuntos, si somos capaces de saber los elementos que pertenecen a la intersección de estos conjuntos, entonces seremos capaces de determinar la cardinalidad de la unión de estos mismos (en el principio de adición solo se ha contemplado si los conjuntos son disjuntos).

Primero vamos a definirlo para dos conjuntos; su ecuación es:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Si observamos el diagrama de Venn, la cardinalidad de la unión anterior se puede escribir como

$$|A \cup B| = |\overline{A} \cap \overline{B}| + |A \cap B| + |\overline{A} \cap B|$$

también vemos que

$$|A| = |\overline{A} \cap B| + |A \cap B|; \text{ despejamos y nos queda } |\overline{A} \cap B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|B| = |\overline{A} \cap B| + |A \cap B|; \text{ despejamos y nos queda } |\overline{A} \cap B| = |B| - |A \cap B|$$

Si sustituimos el resultado de estas dos ecuaciones en la primera, nos queda

$$|A \cup B| = [|A| - |A \cap B|] + [|B| - |A \cap B|] + |A \cap B|$$

donde si operamos, sale la ecuación del principio de inclusión-exclusión

Al ser el principio de la adición de conjuntos un caso particular del de inclusión-exclusión, podremos aplicar la ecuación de este último.

Pero ¿qué ocurre si tenemos la unión de muchos conjuntos con elementos comunes todos ellos y entre ellos?

Sea  $n$  el número de conjuntos, donde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son conjuntos finitos. Llamamos  $\alpha_i$  a la suma de los cardinales de todas las intersecciones de  $i$  conjuntos distintos, tal que  $1 \leq i \leq n$  (es decir, todas las combinaciones posibles de  $n$  conjuntos tomados de  $i$  en  $i$ )

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ \alpha_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ \alpha_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_n &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Entonces se cumple que :

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots + (-1)^{n-1} \alpha_n$$

--



# CAPÍTULO 3.- TEORÍA DE GRAFOS<sup>1</sup>

## 3.1.- DEFINICIONES

- **Vértice o nodo.**- Se representará por una circunferencia, que podrá estar etiquetada. Vértice es el nombre formal en matemáticas. Para las técnicas que utilizaremos, normalmente se usará el término *nodo*.
- **Arista y arco.**- Si A y B son dos nodos distintos,
  - una arista se define como un conjunto de dos nodos de la forma  $\{A,B\}$ . Su representación será con una línea que une los dos nodos.
  - Un arco se define como un par ordenado de la forma  $(A,B)$ . Su representación será con una línea con dirección hacia el segundo nodo del par.

Se dice que dos nodos unidos por un arco son **adyacentes** y también que son los **extremos** del arco.

- **Grado de un vértice (nodo).**- Número de aristas (arcos) que inciden en el vértice (nodo).

Un grafo es **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado. Un grafo regular se dice que es **completo** si en cada nodo existe una arista que sale a cada uno de los nodos restantes del grafo.

- **Grafo (no dirigido).**- conjunto de '*vértices*' distintos unidos por '*aristas*'.  
Formalmente un grafo es  $G=(N,A)$ , donde
  - N es un *conjunto* finito *no vacío* de nodos.
  - A es un conjunto de aristas, es decir, de conjuntos de dos elementos, que son los vértices que se unen.

---

<sup>1</sup> Este capítulo es íntegramente el apéndice A de [de la Fuente 2010].

- **Grafo dirigido.**- o digrafo: Conjunto de '*vértices*' distintos unidos por '*arcos*'.

Formalmente, un grafo dirigido es  $G = (N, A)$  donde:

- $N$  es un conjunto finito no vacío de nodos.
- $A$  es un conjunto de pares *ordenados*, llamados *arcos directores*, que describen la unión desde el primer hacia el segundo nodo. Así  $(A, B) \neq (B, A)$ .

Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, un grafo dirigido es una relación sobre el conjunto  $N$  de los nodos del grafo.

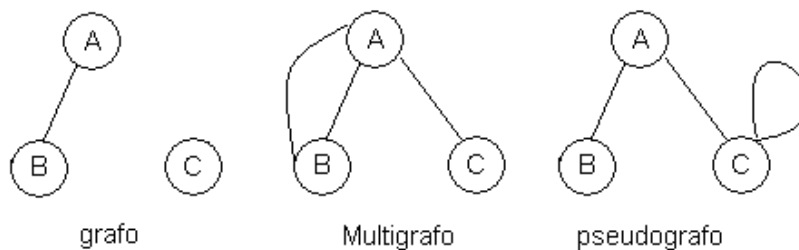
- **Subgrafo.**- *Es también un grafo* (dirigido o no), extraído del grafo original.

Formalmente el grafo  $G' = (N', A')$  es subgrafo de  $G = (N, A)$  si

- $N'$  es un subconjunto no vacío de nodos de  $N$ .
- $A'$  es un subconjunto de  $A$ .

- **Pseudografo.**- Es un grafo (o grafo dirigido) en el que se permiten aristas (arcos) cuyos extremos salen y entran al mismo nodo, es decir, cada arista (arco) forma un **bucle o lazo** sobre sí mismo, siendo un conjunto de la forma  $\{A, A\}$  o un par ordenado de la forma  $(A, A)$ , para grafo no dirigido y dirigido respectivamente..

- **Multigrafo.**- Es un grafo (o grafo dirigido) en el que puede haber más de una arista (arcos en la misma dirección) para dos nodos cualesquiera. Formalmente, en el conjunto  $A$  de aristas (arcos), puede haber dos con los mismos extremos pero distinta aristas (arco). Luego se verá como diferenciarlos.



Grafos no dirigidos

Figura 3.1. Grafos diversos

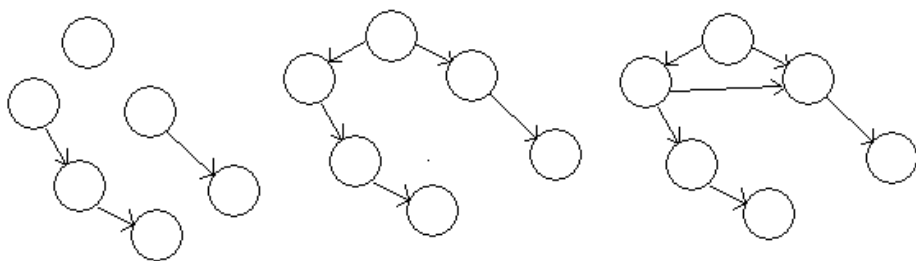
En teoría de computación (autómatas) podremos tener cualquier de los tres tipos de grafo dirigido, mientras que para las técnicas de programación solo se van a considerar aquellos grafos y grafos dirigidos en los que las aristas y los arcos, respectivamente, unen nodos distintos (no habrá bucles ni varios arcos para dos mismos nodos, o si el grafo es dirigido, los arcos tienen que ir en direcciones opuestas).

- **Camino.**- Es una sucesión finita de nodos y aristas (arcos) alternativamente, de manera que entre dos nodos consecutivos hay una arista (arco).  
Para grafos (no así para los multigrafos ni pseudografos), la sucesión puede simplificarse a sólo nodos, dado que en un grafo solo hay un posible camino entre dos nodos.
- **Longitud de un camino.**- Número de aristas (arcos) que tiene. Si la arista (arco) está etiquetada con números, a esta etiqueta se le suele llamar *longitud* de la arista (arco), y la longitud total del camino será la suma de las etiquetas de las aristas (arcos).
- **Camino simple o ruta.**- Son aquellos que no pasan dos veces por el mismo nodo.
- **Camino Cerrado.**- si el último nodo del camino es el mismo que el primero. Formalmente, dados los nodos de un camino  $(n_1 \dots n_k)$ , donde  $n_1 = n_k$  y  $k \geq 1$ , y todos los nodos son distintos excepto  $n_1$  y  $n_k$ .
- **Circuito.**- Camino cerrado en el que no se repite ninguna arista (arco).
- **Camino abierto.**- Cuando en un camino, el último nodo no es el mismo que el primero.

## Detalle

**En la definición de camino no se tiene en cuenta la dirección** de las flechas. Es decir, es indiferente que el grafo sea dirigido o no, lo que se tiene en cuenta es la unión entre nodos.

- **Grafo conexo.**- Cuando entre dos nodos cualesquiera (todos) hay al menos un camino. Dicho de otra forma, hay un camino para cada dos nodos cualesquiera del grafo. Si no es conexo, es **no conexo, inconexo o desconexo**. Estos se pueden clasificar en:
  - **Grafo simplemente conexo o poliárbol.**- Cuando para cada dos nodos cualesquiera (todos) hay solo un camino y solo uno.
  - **Grafo múltiplemente conexo.**- Para algún par de nodos (alguno) hay 2 o más caminos entre ellos (como consecuencia de la definición, si hay un camino cerrado, es múltiplemente conexo).
- **Grafo fuertemente conexo.**- Es un grafo dirigido en el que se puede pasar de entre dos nodos cualesquiera (todos) por un camino siguiendo las flechas de sus arcos.



a) Inconexo

b) Simplemente conexo

c) Múltiplemente conexo

Estos son grafos dirigidos. Para clasificarlos como conexos se tiene en cuenta el camino, por tanto obviamos las flechas de dirección.

Fig 3.2.- Grafos conexos

- **Circuito euleriano**.- Es un circuito que contiene todas las aristas que aparecen una y solo una vez en el camino. Si un grafo tiene algún circuito euleriano, se dice que es un grafo euleriano.

Un circuito euleriano se dará siempre que todos y cada uno de los vértices tengan un grado par.

- **Camino hamiltoniano**.- Es un camino simple que contiene todos los vértices del grafo una y solo una vez. Un ciclo (camino cerrado) hamiltoniano es aquel camino hamiltoniano que empieza y acaba en el mismo vértice. Para resolver un camino hamiltoniano todavía no se ha encontrado un criterio eficaz.

### 3.1.1. Grafos no dirigidos

- **Ciclo**.- Es cualquier camino cerrado.
- **Longitud del ciclo**.- Número de aristas distintas que tiene un camino cerrado.
- **Árbol o árbol libre**.- Un grafo conexo que no tiene ciclos.

Un árbol tiene las siguientes características:

- Para  $n$  nodos, hay exactamente  $n-1$  aristas.
- Si se añade una arista, entonces se produce un ciclo
- Si se elimina una arista, entonces deja de ser conexo.

Un caso especial de estos, los árboles con raíz se verá después de los grafos dirigidos.

- **Bosque**.- Es un grafo que no tiene ciclos pero que no es conexo. Para cumplir con la definición, cada subgrafo conexo que pertenece al bosque es un árbol (de ahí el nombre de bosque).

### 3.1.2. Grafos dirigidos

Dado el grafo dirigido de la figura 3 vamos a definir la relación entre sus nodos:



Fig 3.3. Grafo dirigido simple

- A es **predecesor** de B y viceversa, B es **sucesor** de A. (distancia 1)
- A es **antepasado** de D si se da una de las siguientes condiciones:
  - A es predecesor de D o
  - Existen un nodo B que es sucesor de A y antepasado de D (definición recursiva, para distancia >1).
- D es **descendiente** de A si se da alguna de las siguientes condiciones:
  - D es sucesor de A o
  - Existen un nodo C que es predecesor de D y descendiente de A (definición recursiva para distancia >1).
- A y B son **familia**. Una familia es el conjunto de un nodo y de todos sus padres (si tuviera más de uno).
- **Ciclo (dirigido).**- Cuando, habiendo un camino cerrado, este se puede recorrer en la dirección indicada por los arcos.
- **Bucle.**- Cuando, habiendo un camino cerrado, este NO se puede recorrer en la dirección indicada por los arcos.
- **Grafo Dirigido Acíclico (GDA -DAG en inglés-).**- son aquellos grafos dirigidos en los que no hay ciclos (aunque sí bucles). En estos, **PADRE** es sinónimo de predecesor e **HIJO** es sinónimo de sucesor. Los nodos que no tienen hijos (no tienen descendientes) se llaman **TERMINALES, HOJAS O**

**EXTREMOS.** A su vez todos los nodos que no son extremos, se denominan **NO TERMINALES O INTERNOS.**

Un GDA *conexo* define una relación de orden (normalmente parcial) entre los nodos (además de la propiedad reflexiva y antisimétrica, pueden cumplir la propiedad transitiva; si tuviese ciclos, ya no cumpliría esta última, y por lo tanto no podríamos determinar un primero y un último). Algunos detalles:

- Un hijo puede tener varios padres
  - Como mínimo tiene un nodo del que solo salen arcos y como mínimo tiene un nodo al que solo le llegan los arcos (dirigidos).
- **Poliárboles.-** Son **GDA,s conexos** que **no tienen bucles** (es decir, no tiene caminos cerrados). Al igual que en los anteriores, un nodo puede tener más de un padre.
  - **Árboles (dirigidos)-** Son poliárboles (GDA,s conexos sin bucles) en los que cada nodo tiene exactamente un padre. Sus propiedades son:
    - Existe un único nodo que no tiene antepasados y que además es antepasado de todos los demás. Se denomina **RAÍZ**.
    - Esta raíz no tiene ningún padre. El resto de nodos tienen exactamente un padre. Los nodos que tienen el mismo padre son **HERMANOS**.

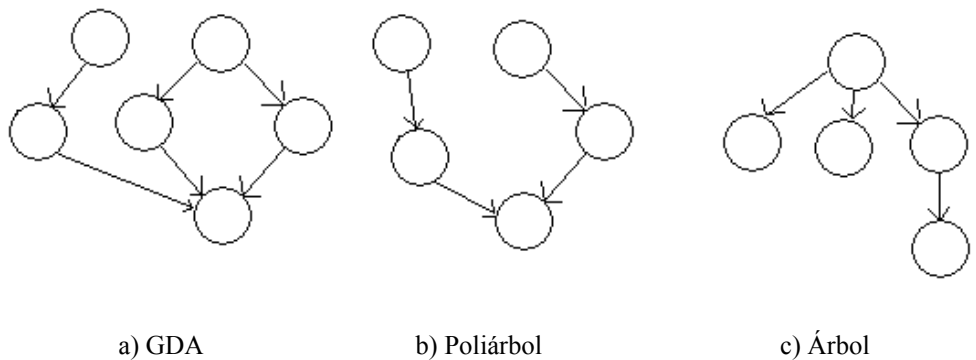


Fig 3.4. Grafos dirigidos

### 3.1.3. Árboles con raíz

Hemos visto que en los árboles dirigidos, el nodo raíz es único y viene dado por la definición del mismo, y que además también podemos utilizar todos los términos heredados de los GDA,s: padre, hijo, terminal u hoja, junto con los propios de los árboles dirigidos: hermano y rama.

Un árbol con raíz es un árbol (no dirigido), donde uno de los nodos (uno cualquiera) se considera como raíz. Como es un árbol especial en el que estamos definiendo un orden parcial para los nodos, podemos utilizar los términos padre, hijo, hermano y terminal en el mismo sentido que en los GDA,s y árboles dirigidos. De la misma forma, podremos utilizar el término bosque, para un grafo dirigido compuesto por árboles dirigidos.

En la representación gráfica de un árbol dirigido y un árbol con raíz (no dirigido), la única diferencia serán las flechas de sus arcos. Así se dibujará el nodo raíz en la parte superior. Por debajo de él se dibujarán todos sus hijos, unidos por una arista (arco) dirigido o no según el árbol que se trate. Esto es lo que forma un **NIVEL** del árbol. Esto se repetirá hasta que se llegue a todos los nodos terminales (ver la figura 3.4.c en la que se dibuja un árbol dirigido de tres niveles).

## 3.2. ÁRBOLES Y GDA,S DE UNA RAÍZ

Dado un nodo cualquiera del árbol con raíz, o un nodo cualquiera en un GDA con solo una raíz, este tiene unas características:

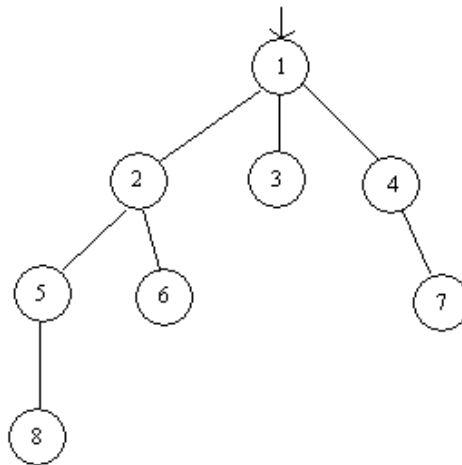
- **Altura de un nodo.**- número de arcos, POR EL CAMINO MÁS LARGO, desde ese nodo hasta un nodo terminal. La altura de un nodo terminal es cero.
- **Altura del árbol o GDA con una raíz.**- Es la altura del nodo raíz.
- **Profundidad de un nodo.**- Número de arcos que hay desde el nodo raíz a ese nodo POR EL CAMINO MÁS CORTO (esto es obvio en el caso de árboles, en el que solo hay un camino posible). La profundidad de la raíz es cero y la de

cualquier otro nodo es la de su antecesor (padre) menos profundo más 1 (recordar que en un GDA –con una raíz en este caso-, se puede dar el caso de tener un nodo que tenga más de un padre).

- **Profundidad del árbol o GDA con una raíz.-** El número de arcos que hay desde el nodo raíz hasta el nodo terminal menos profundo.
- **Nivel de un nodo en un árbol.-** En la mayor parte de la bibliografía consultada, el concepto se define como nivel de profundidad del nodo, siendo por tanto sinónimo de profundidad. Así la raíz está en el nivel 0, sus hijos en el nivel 1, ....

Otros autores definen el nivel como la diferencia de la altura de la raíz menos la profundidad del nodo. Esta definición, que es poco usual, y es equivalente a decir que los nodos terminales más profundos están en nivel 0, sus padres en el nivel 1....

Ejemplo 3.1. Dado el árbol de la figura, identificar cada parámetro del mismo.



Se trata de un árbol con raíz (nodo 1) no dirigido.

- Profundidad del árbol.- El nodo terminal menos extremo es el 3, luego la profundidad del árbol es 1.
- El nodo 8, 6, 3 y 7 tienen una altura 0 (son terminales)

- El nodo 5 y 4 tienen una altura 1.
- El nodo 2 tiene una altura 2. (recordar, camino más largo a un nodo terminal, el 8 en este caso)
- El nodo 1, que es el raíz tiene una altura de 3, que es la altura del árbol (el camino más largo a un nodo terminal es al nodo 8).
- La profundidad del nodo 1, el raíz, es 0. Dicho de otra forma, el nivel del nodo 1 es 0.
- Los nodos 2,3 y 4 están a profundidad 1. Dicho de otra forma, los nodos 2,3 y 4 están en el nivel 1 (con la segunda definición en el nivel 2).
- Los nodos 5, 6 y 7 están a profundidad 2. Dicho de otra forma, los nodos 5,6 y 7 están en el nivel 2 (con la segunda definición en el nivel 1).
- La profundidad del nodo 8 es 3. Dicho de otra forma el nodo 8 está en el nivel 3 (con la segunda definición en el nivel 0).

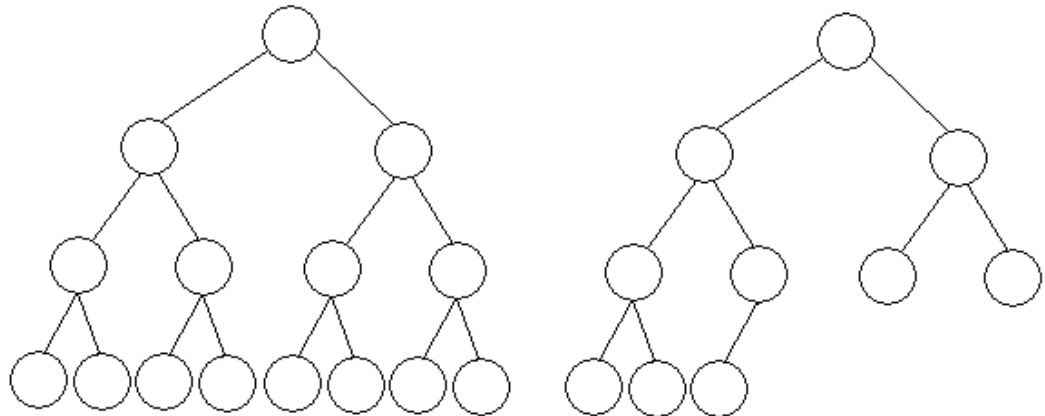
--

### 3.2.1 Árboles binarios

Es un árbol tal que el grado de todos sus nodos no es superior a tres. De aquí se deduce que cada nodo solo puede tener dos hijos como máximo, conocidos como *hijo izquierdo e hijo derecho* (una arista es la que viene del padre y las otras dos de sus posibles hijos).

Se dice que un árbol binario es **completo** (no confundir con la definición de completo en los grafos) si todos sus nodos tienen cero o dos hijos; los que tienen cero hijos son nodos terminales y se caracterizan por estar a la misma profundidad.

Es **casi-completo o esencialmente completo** si, dado un árbol de profundidad  $n$ , todos los nodos de profundidad  $n-2$  tienen dos hijos y los de profundidad  $n-1$  tienen 0, 1 (que se representa a la izquierda) ó 2 hijos. Además se representan de izquierda a derecha, de manera que los nodos del nivel  $n-1$  que son no terminales, primero se representan los que tienen 2 hijos, luego el que tiene un hijo y luego los que son terminales.



a) Arbol binario completo

b) Arbol binario casi-completo

Fig 3.5. Árboles binarios

### 3.3.MATRIZ DE ADYACENCIA

Es la manera analítica de representar un grafo o un grafo dirigido (pensar que la manera gráfica está limitada a grafos o digrafos sencillos, ya que, en caso contrario, serían ilegibles). Según se trate de un grafo o un digrafo tenemos dos matrices distintas:

- Dado un grafo  $G=(N,A)$ , donde hay  $n$  nodos, etiquetados de 1 a  $n$ , la matriz  $M_n$  de adyacencia se define como la matriz cuadrada de dimensión  $n$ , donde cada elemento  $m_{ij}$  (para los valores  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ ) toma el valor 1 ó 0:
  - Si la arista  $\{i,j\} \in A$ , entonces los elementos  $m_{ij}$  y  $m_{ji}$  toman el valor 1.
  - Si la arista  $\{i,j\} \notin A$ , entonces los elementos  $m_{ij}$  y  $m_{ji}$  toman el valor 0.

- Dado un grafo dirigido  $G=(N,A)$ , donde hay  $n$  nodos, etiquetados de 1 a  $n$ , la matriz  $M_n$  de adyacencia se define como una matriz cuadrada de dimensión  $n$ , donde cada elemento  $m_{ij}$  (para los valores  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ ) :

- Toma el valor 1 si el arco  $(i,j) \in A$

- Toma el valor 0 si el arco  $(i,j) \notin A$

recordar que en el grafo dirigido,  $(i,j)$  es un par ordenado y por tanto  $(i,j) \neq (j,i)$

La matriz de adyacencia va a representar, para un nodo concreto, los nodos que están conectados a este (camino de longitud 1):

- Para grafos no dirigidos, los que están en la fila (columna) del nodo (es una matriz simétrica).
- Para grafos dirigidos, son los nodos que están en la fila y la columna del nodo en cuestión.

Ejemplo 3.2. Matriz de adyacencia para el árbol del ejemplo 3.1.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**BIBLIOGRAFÍA**

[Brassard et al 1997] Brassard, G., Bratley, P. *Fundamentos de Algoritmia*. 1ª Edición. Madrid (España): Pearson Educación S.A, impresión de 2006. ISBN 9788489660007

[Bujalance et al, 1993] Bujalance, E., Bujalance, J.A., Costa, A.F., Martínez. E. *Elementos de Matemática Discreta*. 1º edición. Madrid (España): Editorial Sanz y Torres, S.L, 2003. ISBN 84-88667-00-0

[Devore, 2005] Devore, J. L. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 6ª edición. Mexico: Thomson Learning, 2005. ISBN 970-686-457-1

[de la Fuente 2010] de la Fuente López, R.,J. *Inteligencia Artificial. Introducción y tareas de búsqueda*. [en línea]. [consulta 21-6-2010] disponible en: <http://www.innova.uned.es/webpages/aconute/index.html>.

[Etayo et al, 1983] Etayo, J., Colera, J., Ruiz, A. *Matemáticas 1º BUP*. Aprobado por OM de 5-3-1976. Madrid (España): Editorial Anaya, impresión en 1983. ISBN 84-207-1703-7

[Fernández, 2003] Fernández Laguna, V. *Teoría básica de conjuntos*. 1ª edición. Madrid (España): Grupo Anaya, 2003. ISBN 8466726144

[Lazcano et al, 1984] Lazcano Uranga, I., Barolo Babolín. P.. *Matemáticas IFP2*. Aprobado por OM de 18-5-1977. Zaragoza (España): Editorial Luis Vives, impresión en 1984. ISBN 84-263-0298-X

[Manzano et al 2005] Manzano, M., Huertas, A. *Lógica para principiantes*. 1ª edición. Madrid (España): Alianza Editorial, 2005. 1ª impresión. ISBN 84-206-4570-2

[Mira et al 2005] Mira, J., Delgado, A.E., Boticario, J.G., Diez, F.J. *Aspectos básicos de la inteligencia artificial*. 1º Edición. Madrid (España): Editoria Sanz y torres, S.L., 2005. ISBN 84-88667-13-2

[Díez 1998] Díez, F.J., *Introducción al razonamiento aproximado*. [en línea] . UNED. 1ª edición. Madrid: UNED 1998, revisión 2005. [consulta 15-11-2008]. Formato PDF, disponible en: <http://www.ia.uned.es/~fjdiez/libros/razaprox.html>.